4 Superfici unilatere

Una superficie puo' essere aperta o chiusa: un cerchio e' una superficie aperta (possiede un bordo), una sfera e' una superficie chiusa. Una superficie puo' essere orientabile (ovvero bilatera) oppure non orientabile (ovvero unilatera). Una superficie e' orientabile se dato un punto P, qualsiasi percorso si segua sulla superficie che inizi e termini in P e' tale per cui l'orientazione positiva definita in P all'inizio si ritrova tale al termine del percorso.

4.1 Il nastro di Moebius

Un foglio ha due facce: ma se incollo una striscia di carta ruotando di 180 gradi un'estremita', ottengo una superficie con una sola faccia (vedere le formiche che camminano sul nastro e percorrono entrambe le facce: ma ci sono ancora due facce?). La superficie di Moebius (1790-1868; matematico tedesco che si occupo' di topologia) e' il primo esempio di superficie unilatera aperta.

Il nastro di Moebius e' stato usato da molti artisti.

Max Bill raggiunse quel tipo di forma attraverso l'intuizione, e a posteriori ebbe coscienza della esistenza come oggetto matematico.

″ L'arco di tempo piu' lungo in assoluto, cinquant'anni, e' stato quello che Bill ha dedicato a un gruppo di opere basae sul concetto di nastro infinito. La prima versione risale agli inizi della sua attivita' e l'ultima invece (se e' veramente l'ultima) la porto' a termine nel 1968: la monumentale Continuita' posta davanti alla Deutsche Bank di Francoforte.

E' lo stesso Bill a scrivere nel 1935 la storia della sua origine: - mi si assegno' il compito di progettare un elemento dinamico inteso come 'luogo di fuoco' e composto da una installazione statica fatta da fili metallici incandescenti, esposti in una casa modello fornita al suo internio di ogni tipo di impianti elettrici. Nella ricerca di una soluzione per una scultura sospesa in grado di girare nell'aria calda che saliva, creai un oggetto costituityo da un uniuco lato e lo chiamai 'nastro infinito'.-

Ancora, non fu dalla matematica, ma da un'idea di esperimento che Bill arrivo' al nastro di Moebius, il quale gia' da decenni era conosciuto presso gli specialisti come una delle ctreazioni matematiche piu' entusiasmanti dai tempi dei corpi platonici. Quando Bill ne venne a conoscenza, rimase comprensibilmente scioccato e il tema fu archiviato.

Per fortuna pero' lo riprese alcuni anni dopo realizzando cosi' alcune tra le piu' belle sculture di questo secolo. Anche se a livello teorico il suo nastro infinito e' identico a quello di Moebius, Bill aveva in mente qualcosa di diverso: - il mio lavoro non era ne' di carattere scientifico ne' di carattere matematico, bensi' strettamente estetico-.″[25]

Un esempio e' riportato in Fig. 35. Parlando di Moebius non possono mancare le immagini di Escher, figure 36 e 37. E non va dimenticato l'uso profondamente diverso che ne fa Lygia Clark per significare l'esperienza della scelta (e della fine della possibilita' di scelta) [26]: fig. 38 e 39.

[25] Gerstner (2006)

[26] Bois and Krauss (2003, pag. 211-213)

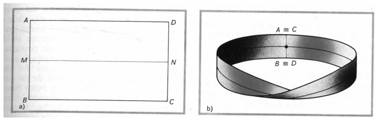

Figura 34: Nastro di Moebius

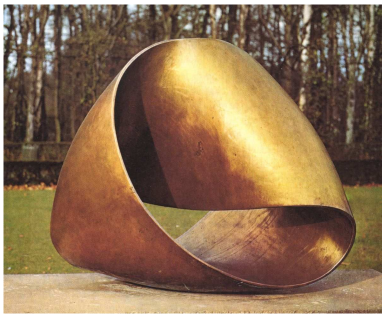

Figura 35: Max Bill. Endless torsion. 1953-1956. (Bronzo, 125 x 125 x80 cm. Antwerpen)

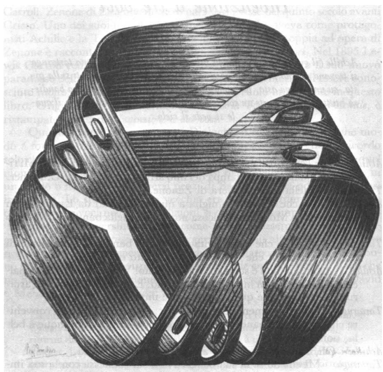

Figura 36: M. C. Escher. Nastro di Moebius. Xilografia su legno di testa a quattro colori, 1961

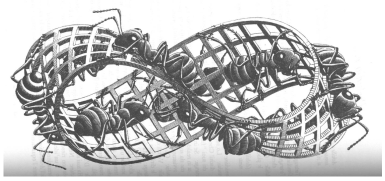

Figura 37: M. C. Escher. Nastro di Moebius. Xilografia su legno di testa a tre colori, 1963

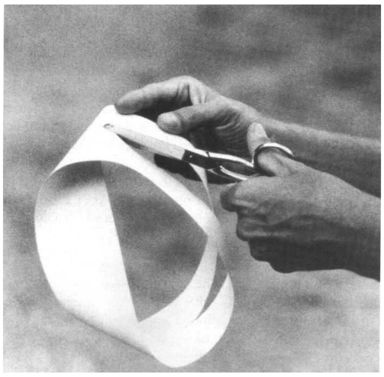

Figura 38: Lygia Clark. Caminhando. 1964

Figura 39: Lygia Clark. Caminhando. 1964

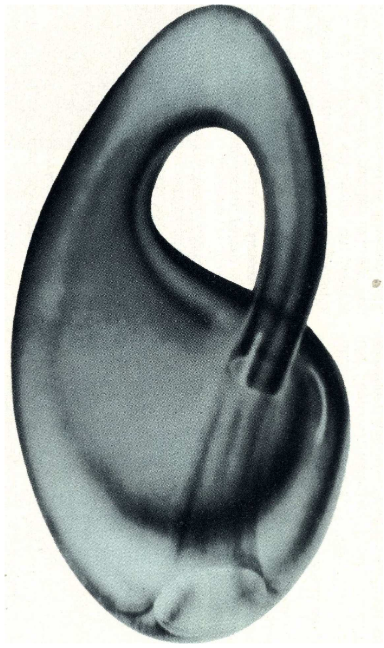

Figura 40: Una rappresentazione della bottiglia di Klein.

5 La bottiglia di Kein e quella di Boccioni

La bottiglia di Klein[27] (fig. 40) e' un esempio di superficie unilatera chiusa, che cioe' non ha interno (non si puo' sapere se siete dentro o fuori). Se viene tagliata a meta' nel senso della lunghezza si ottengono due nastri di Moebius. Non si puo' veramente costruire fisicamente (perche' dovreste fare un buco che non esiste nell'oggetto geometrico) ma se ne possono fare dei modelli. Ancora come assonanza istintiva, la bottiglia di Boccioni (fig. 41) nel suo mostrarci interno ed esterno richiama alcune suggestioni della bottiglia (del geometra) Klein.

6 Formule e rappresentazione

6.1 Leonardo, turbolenza e nubi

Rappresentazione ed evocazione sono due concetti che appartengono sia alla scienza sia all'arte.

Partiamo da una citazione in merito alla capacita' della scultura in rilievo di evocare cio' che e' nascosto: ″... l'atteggiamento dello spettatore si spiega chiaramente attraverso la natura del rilievo stesso: nella sua lettura immediata e trasparente dell'opera, egli si trova investito di un'onniscienza parallela a quella dell'autore ″ [28].

Questo concetto si applica a pieno titolo alla scienza (matematica e fisica principalmente): un aspetto fondamentale per chi si occupa di scienza e' il potere evocativo delle formule[29]. Per un persona con propensione alla matematica esistono delle 'belle formule',

[27] Felix Christian Klein (Duesseldorf,1849; Goettingen, 1925), matematico tedesco conosciuto soprattutto per i suoi contributi alla geometria non euclidea, ai collegamenti tra geometria e teoria dei gruppi e per alcuni risultati sulla teoria delle funzioni.

[28] Krauss (1998, pag. 20)

[29] potere evocativo che costituisce un carattere delle opere scritte di qualunque natura, come osservato

Figura 41: Umberto Boccioni. Sviluppo di una bottiglia nello spazio. 1912/13. Bronzo, Milano, Civica Galleria d'Arte Moderna.

delle 'formule eleganti'. Incidentalmente, questo atteggiamento tende ad allontanare le persone non specialiste dalla matematica. Vorrei essere capace di rovesciare questa sensazione, proprio chiedendovi di considerare il fatto che la capacita' evocativa del segno e' una proprieta' che accomuna matematica e disegno, e, come si diceva all'inizio, capirsi e' una questione di disponibilita' e di allenamento [30].

Un esempio: la turbolenza ed il moto dei fluidi. Qui di seguito trovate alcune equazioni, tanto per dare un'idea di un possibile linguaggio. Queste equazioni sono state formalizzate da Navier e Stokes nel 1823, e poi da Reynolds (1883) e vengono usate correntemente da fisici, meteorologi, ingegneri. Dovete anche sapere che non conosciamo soluzioni esatte di queste equazioni (se non in casi piuttosto banali) [31] e quindi per capire abbiamo tuttora bisogno dell'esperienza (sempre) e della soluzione numerica approssimata: vedi la Fig. 42.

dal fisico Bernardini in una conversazione con il linguista De Mauro: Bernardini and DeMauro (2003, pag. 21 e pag.124). Il disegno possiede tale carattere in misura certo non minore.

[30] mi sembra pertinente notare l'importanza del segno sottolineata da Benjamin (1982) alla fine degli anni dieci, distinguendo tra pittura e disegno: ″ Si potrebbe dire che la sostanza del mondo e' attraversata da due sezioni: la sezione longitudinale della pittura, e la sezione trasversale di certe forme di disegno. Pare che la sezione longitudinale abbia una funzione rappresentativa, contenga in qualche modo le cose; la sezione trasversale e' simbolica: contiene i segni.″

[31] Richard Feynman, premio Nobel per la Fisica nel 1965, scrive, dopo aver presentato appunto queste equazioni: ″La lezione piu' importante da imparare da tutto questo e' che una formidabile varieta' di comportamenti si nasconde nel semplice sistema di equazioni....L'unica difficolta' e' che non abbiamo oggi il potere matematico di analizzarle, eccetto che per numeri di Reynolds piccolissimi (piu' o meno, per velocita' molto basse)... Abbiamo visto or ora come la complessita' delle cose possa facilmente e drammaticamente eludere la semplicita' delle equazioni che le descrivono. Inconsapevole della potenzialita' delle equazioni anche semplici, l'uomo ha spesso concluso che non le pure equazioni, ma nulla di meno che un Dio e' quel che ci vuole per spiegare la complessita' dell'universo.″ (da Feynman et al., 1969, pag. 41-15)

$$\frac{Du_i}{Dt} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \varepsilon_{ij3} f u_j + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \delta_{i3} g \tag{18}$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_f u_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{19}$$

$$\frac{DT_f}{Dt} \equiv \frac{\partial T_f}{\partial t} + u_j \frac{\partial T_f}{\partial x_j} = \chi \frac{\partial^2 T_f}{\partial x_j \partial x_j} \tag{20}$$

$$p = R\rho_f T_f \ , \ R = \ 287.04 m^2 s^{-2} K^{-1} \tag{21}$$

$$u_i = \overline{u_i} + u_i' \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{D}\overline{u_i}}{\mathrm{D}t} \equiv \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_{00}}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \varepsilon_{ij3} f \partial u_j + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j} - \delta_{i3}\frac{g}{\rho_{00}}\rho - \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} \tag{23}$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0 \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{D}\overline{\rho}}{\mathrm{D}t} \equiv \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_j} = \chi \frac{\partial^2 \overline{\rho}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j' \rho'}}{\partial x_j} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}\overline{u_i' u_k'}}{\mathrm{D}t} \equiv \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} & \\
&= (-\overline{u_i' u_j'}\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} - \overline{u_k' u_j'}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}) - \frac{\partial \overline{u_i' u_j' u_k'}}{\partial x_j} \\
&- \frac{g}{\rho_{00}}(\delta_{k3}\overline{u_i'\rho'} + \delta_{i3}\overline{u_k'\rho'}) + f(\varepsilon_{kj3}\overline{u_i' u_j'} + \varepsilon_{ij3}\overline{u_k' u_j'}) \\
&- \frac{1}{\rho_{00}}(\frac{\partial \overline{p' u_k'}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{p' u_i'}}{\partial x_k}) - \overline{\frac{p'}{\rho_{00}}(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k'}{\partial x_i})} \\
&+ \nu(\overline{u_k' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_j}} + \overline{u_i' \frac{\partial^2 u_k'}{\partial x_j \partial x_j}})
\end{aligned} \tag{26}$$

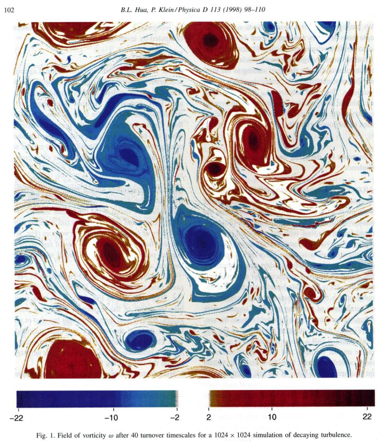

Figura 42: Simulazione numerica di un flusso turbolento. La visualizzazione mette in evidenza grandi strutture (vortici) immerse in un ambiente di strutture analoghe, di dimensioni decrescenti. Il colore blu corrisponde a una rotazione in senso antiorario, il rosso in senso orario. (da Hua and Klein, 1998, fig.1).

Guardiamo i disegni di Leonardo: per esempio la figura 43. Leonardo non conosce le formule che governano il moto dei fluidi, i suoi disegni contengono in qualche modo l'informazione che uno specialista addestrato puo' ricavare dalle formule (dalle formule si puo' ottenere una previsione quantitativa, dai disegni no).

La forza di quelle immagini sta dunque nel fatto che evocano/rappresentano fenomeni reali di cui abbiamo una conoscenza parziale: i disegni di Leonardo ci portano oltre lo specifico fenomeno, per dirci qualcosa sulla natura del moto dei fluidi (l'instabilita', i vortici) del tutto generale. Talmente generale che sia le simulazioni numeriche (fig. 42) sia immagini da satellite dell'atmosfera (la figura 44 per qualche esempio) ci mostrano fenomeni qualitativamente simili e governati dalle stesse leggi.

6.2 I diagrammi di Feynman

Un altro esempio: i diagrammi di Feynman, per esempio vedi la fig. 45. Qui il disegno diventa una grammatica per rappresentare fenomeni la cui matematica e' estremamente complessa: in questo caso il disegno e le regole che ci permettono di eseguirlo costituiscono il linguaggio per rappresentare i fenomeni. Vi racconto qualcosa in merito[32]. Il primo diagramma in alto rappresenta, poniamo, un elettrone che si sposta dal punto A al punto B. La freccia indica il fatto che prima l'elettrone e' in A e dopo (nel tempo) e' in B. Nell'ambito di questa 'grammatica', se giro la freccia non significa che vado 'indietro' nel tempo, ma che sto parlando di un antielettrone (per un fisico tutto questo dovrebbe significare qualcosa). A questa linea corrisponde un'espressione matematica.

Supponiamo di voler considerare l'interazione tra elettroni e fotoni, ed in particolare l'emissione e l'assorbimento di fotoni virtuali da parte del nostro elettrone. Il processo e' rappresentato nel secondo diagramma, dove la linea ondulata indica la presenza del fotone. Notate che la linea ondulata (il fotone) non ha freccia: in maniera assai semplice rappresentiamo qui il fatto che un fotone e' l'antiparticella di se stesso, e la freccia del tempo e' per il fotone in qualche modo indifferente. E' chiaro che il terzo diagramma ci racconta di un processo a due fotoni.

[32]Hofstadter (1984, pag. 156-157)

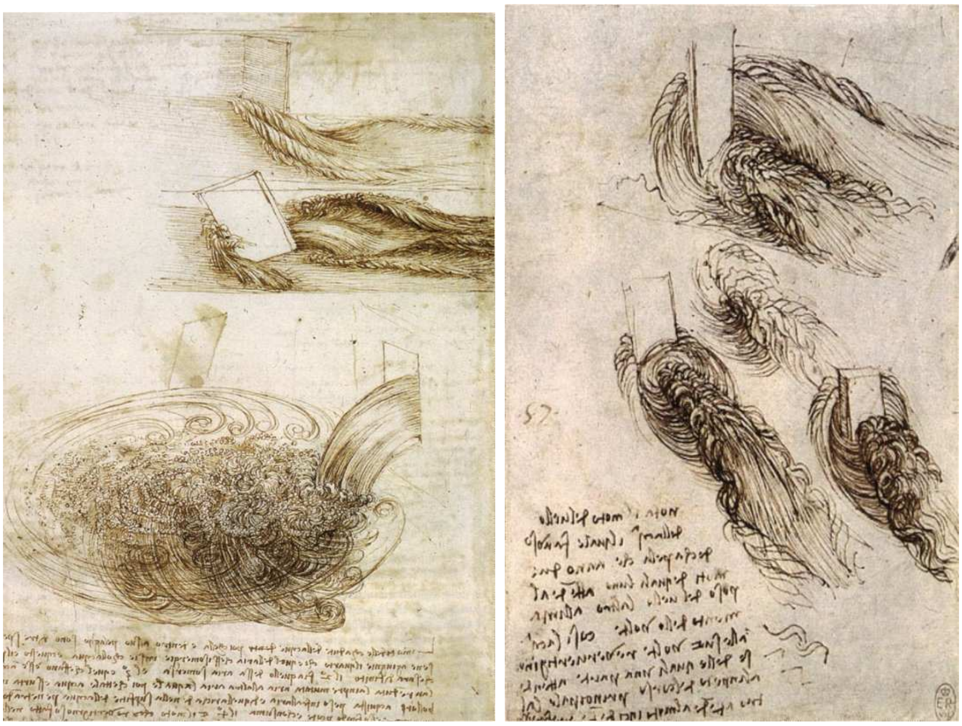

Figura 43: Esempi di flusso di acqua, di Leonardo.

Una faccenda intrigante e' che un fotone puo' dare luogo, per un tempo brevissimo, ad una coppia eletrone-antielettrone: come dire che l'energia si trasforma in massa, e dopo un brevissimo intervallo di tempo la massa sparisce e ritorna solo energia pura. Questo processo puo' essere raffigurato nel quarto diagramma. L'antielettrone e' come un elettrone che tornando indietro nel tempo, ripristina tutto come all'inizio del processo.

Questi processi possono annidarsi uno nell'altro fino a profondita' arbitraria, e ne risultano diagrammi assai complicati, come nel quinto diagramma: ad una osservazione 'macroscopica', l'elettrone risulta semplicemente essere andato da A a B, il diagramma pero' ci mostra una estrema complessita' di interazioni.

La 'grammatica' di questi grafici impedisce che se ne disegnino di scorretti, ovvero impedisce di formulare soluzioni (al problema di come un elettrone va da A a B) inesatte o impossibili. Un esempio di soluzione impossibile e' dato nell'ultimo diagramma (in basso), che in effetti soffre per lo meno di una certa dissimetria.

6.3 Formule 'decorative'

Diverso e' l'uso di formule come 'decorazione' (figure 46): ″... in Francia Bernard Venet (1941) esponeva pagine di grafici tratti da libri scientifici enormemente ingigantiti...″ [33]

[33] Vettese (1998), pag. 213

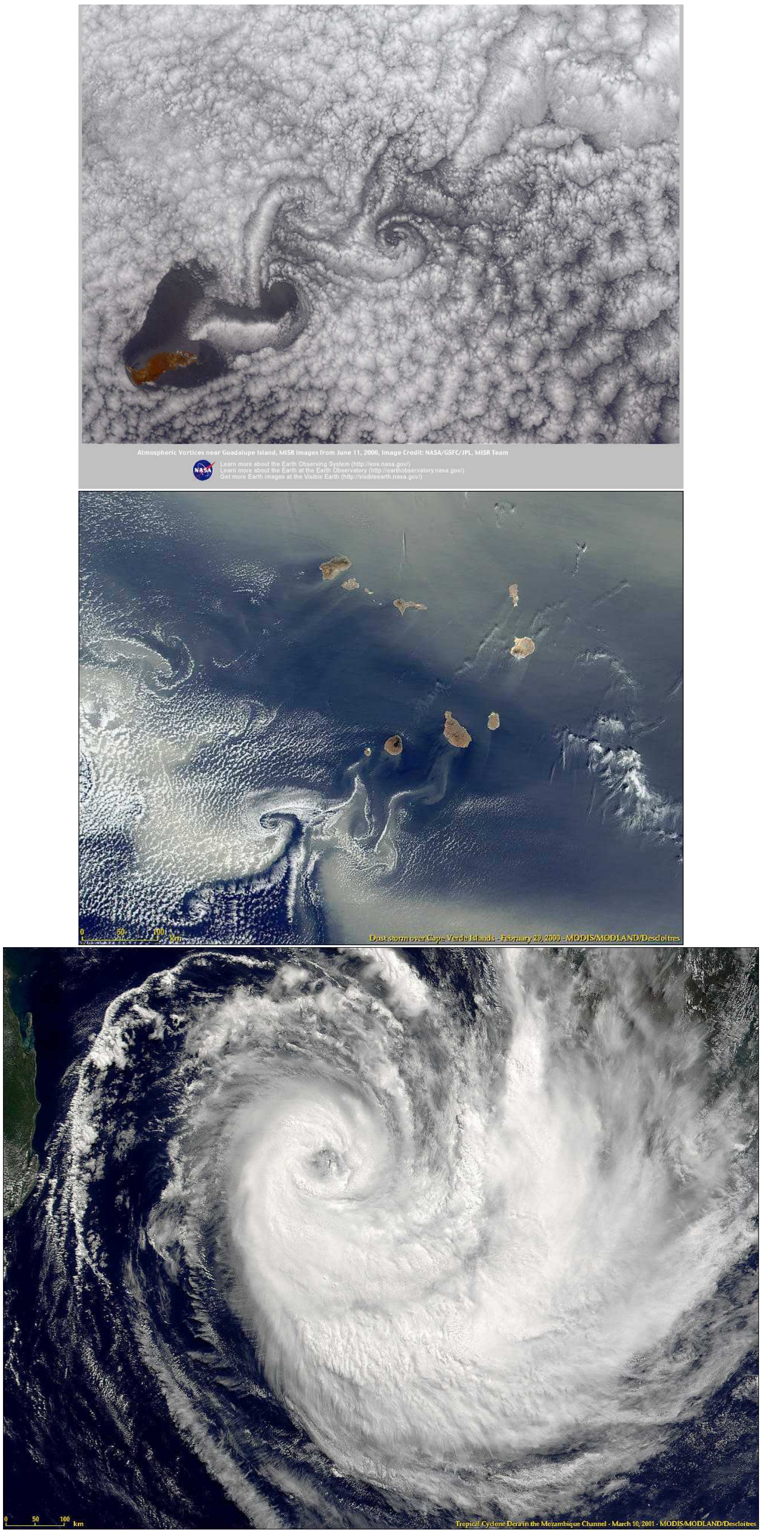

Figura 44: Scia di vortici sottovento all'isola di Guadalupe, all'isola di Capo Verde, e un ciclone tropicale

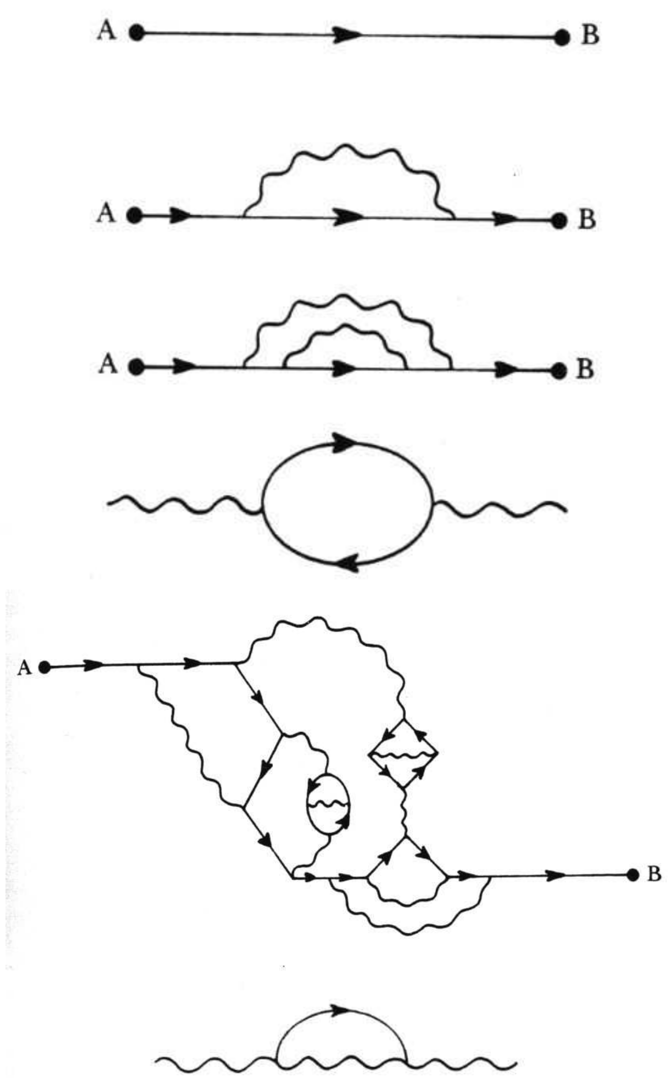

Figura 45: Esempi di diagrammi di Feynman. L'ultimo e' sbagliato!

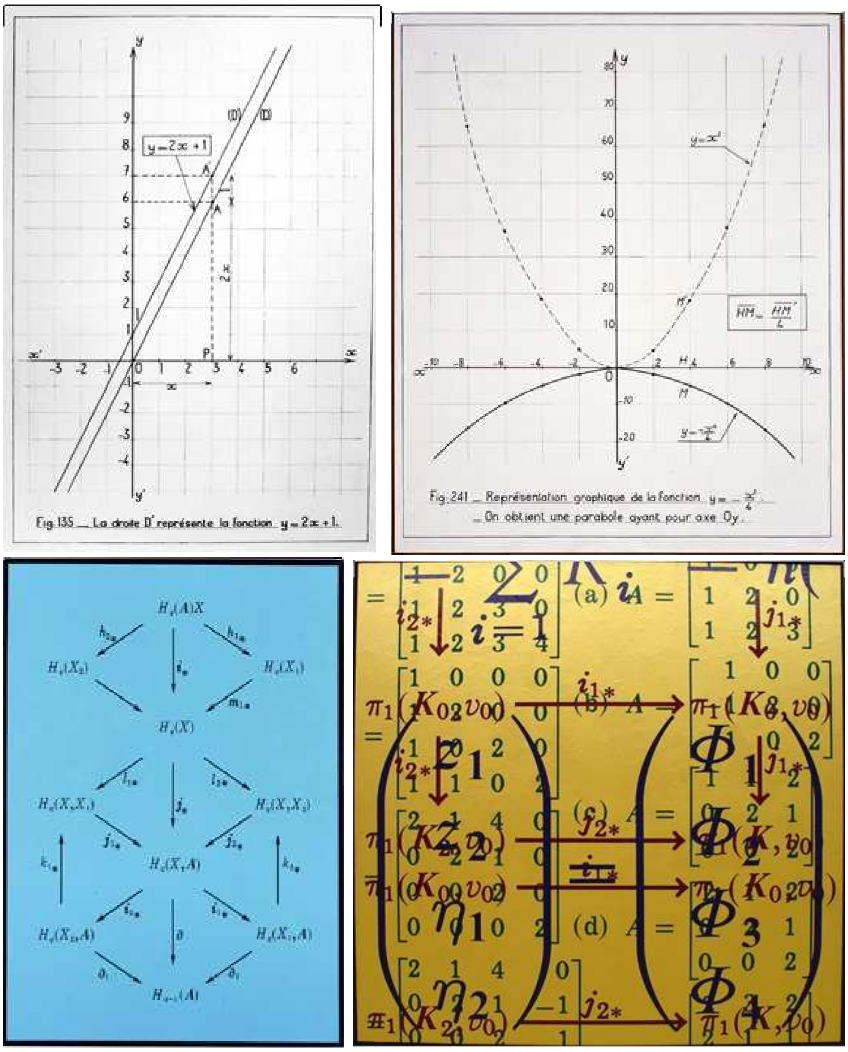

Figura 46: Bernar Venet. Opere dal 1966 al 2004.

7 Il pensiero riflette su se stesso: un parallelo ulteriore tra disegno e matematica

L'oscillazione tra il formalismo e l'iconografia caratterizza le reazioni degli osservatori di fronte alle opere d'arte che introducono elementi di novita' e di rottura [34].

Semplificando, diciamo che c'e' il livello della rappresentazione ed il livello della analisi dell'atto, dell'essenza del disegno.

Un'osservazione sull'autoreferenzialita':

″ a partire da Cezanne e i cubisti, per dirla in sintesi, l'opera dell'artista si e' progressivamente liberata da qualsiasi funzione subordinata a esignze mimetiche e narrative legate alla rappresentazione virtuale e formale di realta' altre da se stessa, conquistando lo statuto di oggetto autonomo, con una specifica identita' estetica essenzialmente indipendente ed autoreferenziale dal punto di vista dei criteri linguistici e compositivi ...″[35]

Questa osservazione ci offre uno spunto circa possibili vicinanze tra il pensiero del fare arte e quello del fare matematica (sui fondamenti).

Ci aspettiamo che rappresentazione ed analisi dell'atto siano categorie generali del pensiero, ed infatti le ritroviamo un poco trasformate analizzando l'evoluzione della matematica, e della riflessione dei matematici sulla loro disciplina: osserviamo un lato 'ingegneristico', costruttivo, ed un lato 'autoriflessivo'. Ve ne faccio un brevissimo cenno, perche' fa gioco al discorso sull'esistenza di parallelismi ed in sostanza sull'unitarieta' del pensiero [36].

La matematica nasce come aritmetica, strumento per fare di calcolo. Non e' scissa pero' dalla logica e dalla filosofia nel mondo greco. Questa unificazione gioca brutti scherzi, se pensate a come viene utilizzata da Zenone per dimostrare l'impossibilita del movimento (la freccia che scoccata verso un bersaglio copre meta' del percorso in un dato tempo, poi meta' del rimanente percorso in un intervallo di tempo minore ma finito, poi ancora meta' del percorso rimanente e cosi' via; potete continuare a dimezzare senza mai trovare una conclusione del tipo: lo spazio rimanente e' zero). Zenone con un argomento analogo ci mostra che Achille non potra' mai raggiungere la tartaruga che si muove nella sua stessa direzione, se e' partito con un handicap anche piccolo, ma finito. La soluzione al paradosso sta nella comprensione delle serie convergenti e del concetto di passaggio al limite.

Questo e' un paradosso che verte sul calcolo di somme di infiniti addendi, un'estensione delle somme del bilancio di casa. Ma esiste un altro tipo di problema, che sempre ha radici nel pensiero greco.

Prendete l'affermazione del filosofo cretese Epimenide: ′ tutti i cretesi sono bugiardi ′. L'affermazione puo' essere riformulata cosi': ′Questo enunciato e' falso′. E' chiaro che se l'affermazione fosse vera sarebbe falsa, e viceversa.

Questo paradosso attiene alla logica; ha generato altri paradossi equivalenti che hanno stimolato la fantasia dei matematici alla fine dell'Ottocento. Il problema consisteva nel tentativo di meccanizzare i processi del ragionamento. I greci antichi ne sapevano qualcosa: Aristotele aveva codificato il sillogismo; Euclide la geometria.

Nell'Ottocento si scoprirono geometrie non euclidee: questo mise in dubbio la tesi che la matematica studiasse il mondo reale e getto' un poco di panico nei circoli matematici.

George Boole e Augustus De Morgan andarono oltre Aristotele nel codificare le forme

[34] si veda la discussione su Olimpia di Manet in Bois and Krauss (2003)

[35] Poli (2005)

[36] chi fosse curioso puo' trovare una trattazione piu' completa, pur sempre divulgativa, in Hofstadter (1984), da cui ho tratto questa parte.

del ragionamento deduttivo (Boole scrisse un libro dal titolo piuttosto esagerato 'Le leggi del pensiero').

Gottlob Frege a Jena e Giuseppe Peano a Torino lavoravano per abbinare il ragionamento formale allo studio degli insiemi e dei numeri. David Hilbert a Gottinga elaboro' una formalizzazione della geometria che andava oltre quella euclidea.

Nel frattempo (attorno al 1880) si sviluppava la teoria degli insiemi, con Georg Cantor. Questa teoria era molto attraente ancorche' non intuitiva, ma presto vennero alla luce nuovi paradossi. Il piu' famoso e' il paradosso di Russel (considerate la classe degli insiemi che non contengono se stessi come elementi: p. es. l'insieme delle cassette da frutta: chiamiamoli Insiemi Ordinari IO; considerate gli insiemi che contengono se stessi come elementi (sono un poco piu' strani): per esempio l'insieme di tutti gli insiemi, oppure l'insieme di tutte le cose eccetto Giovanna d'Arco: chiamiamoli non-IO. Battezziamo K l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi (l'insieme di tutti gli IO): l'insieme K e' un insieme IO o non-IO? Ecco la contraddizione: se proviamo a dire che e' un insieme IO, allora contiene se stesso, e quindi e' un non-IO. Viceversa se affermiamo che e' un non-IO.)

Esiste una formulazione 'linguistica' del paradosso, che ci aiuta a capire quanto tale paradosso sia generale, detta paradosso di Grelling. Dividiamo gli aggettivi della lingua italiana in due categorie: quelli che descrivono se' stessi, come 'sdrucciolo', 'breve', 'esasillabico', e quelli che non descrivono se stessi, come 'commestibile', 'lungo', 'incompleto'. I primi sono auto-descrittivi: li chiamiamo, con un aggettivo, 'autologici'; i secondi sono non-auto-descrittivi; li chiamiamo 'eterologici'. Il paradosso e' condensato nella domanda: 'eterologico' e' 'eterologico'?

In questo contesto storico si colloca la pubblicazione, tra il 1910 ed il 1913, dei 'Principia Mathematica', ad opera di Bertrand Russel e Alfred North Whitehead, il cui obiettivo potremmo condensare nel proposito di estromettere ogni possibilita' di paradosso dalla logica, dalla teoria degli insiemi e dall'aritmetica. L'obiettivo era dunque di derivare tutta la matematica dalla logica, senza contraddizioni.

Hilbert suggeri' ai colleghi matematici una sfida: dimostrare rigorosamente che il sistema definito nei 'Principia Matematica' era sia coerente (cioe' non conteneva contraddizioni) sia completo (tale cioe' che ogni enunciato vero dell'aritmetica potesse essere derivato all'interno della struttura di ragionamento dei Principia stessi).

Nel 1931 Kurt Goedel pubblico' un lavoro 'Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei 'Principia Mathematica' e di sistemi affini' in cui compariva un teorema, che si puo' parafrasare cosi': 'Tutte le assiomatizzazioni coerenti dell'aritmetica contengono proposizioni indecidibili'. Il risultato di questo lavoro era che il sistema dei 'Principia Mathematica' e' incompleto, ossia vi sono enunciati veri dell'aritmetica che i metodi di dimostrazione del sistema non possono dimostrare. E questo risultato si estende ad ogni sistema assiomatico che pretendesse di raggiungere gli stessi risultati.

Quali sono i motivi per cui vi ho raccontato tutta questa storia? Intanto per notare come arrivati ad un certo punto si tende a ripensare la natura profonda del proprio lavoro, sia nel campo dell'arte, sia nel campo della matematica. E, se volete, che il messaggio che ci viene dal teorema di incompletezza di Goedel e' che i paradossi e le contraddizioni sono insiti nel ragionamento anche formalizzato, e sono fonte di crescita piuttosto che motivo di depressione, e anche questo accomuna campi estremamente diversi tra loro.

Riferimenti bibliografici

aa. vv., 2000: *Arte povera in Collezione*, Charta, Milano.

aa. vv., 2007: *Enciclopedia Biografica Universale*, Treccani/La Repubblica, Roma.

Abate, M., 2006: Il girasole di fibonacci, *Matematica e Cultura 2006*, M. Emmer, ed.

Accame, G. M., ed., 2004: *Saffaro. Le forme del pensiero*, Edizioni Aspasia, Bologna.

Benjamin, W., 1982: Pittura e grafica, *Metafisica della gioventu'. Scritti 1910-1918*, Einaudi, Torino, p. 202.

Bernardini, C., 2007: *Prima lezione di fisica*, Laterza, Bari, cat. 877.

Bernardini, C. and T. DeMauro, 2003: *Contare e raccontare. Dialogo sulle due culture*, Laterza, Bari.

Bertozzi, M., 2007: *Il quadrato. Tesi di laurea, Accademia di belle arti, Bologna.*

Bois, Y.-A. and R. Krauss, 2003: *L'informe*, Bruno Mondadori, Milano.

DeSautoy, M., 2004: *L'enigma dei numeri primi*, Rizzoli, Milano, trad. italiana di C. Capraro.

Feynman, R. P., R. B. Leighton, and M. Sands, 1969: *La fisica di Feynman*, vol. II, Addison Wesley, London.

Foster, H., R. Krauss, Y.-A. Bois, and B. Buchloch, 2006: *Arte dal 1900*, Zanichelli, Bologna, trad. ital.

Gerstner, K., 2006: L'estetica che nasce dallo spirito della geometria, *Max Bill, pittore, scultore, architetto, designer*, T. Buchsteiner and O. Letze, eds., Electa, Milano, pp. 124–127.

Greenberg, C., 1991: *Arte e cultura*, Allemandi Editore, Torino, cat. 604.

Hofstadter, D. R., 1984: *Goedel, Escher, Bach: una eterna ghirlanda brillante*, Adelphi, Milano.

Hua, B. L. and P. Klein, 1998: An exact criterion for the stirring properties of nearly two-dimensional turbulence. *Physica D*, **113**, 98–110.

Krauss, R., 1998: *Passaggi. Storia della scultura da Rodin alla Land Art*, Bruno Mondadori, Milano.

Paiano, R. and F. Poli, 2007: *Hidetoshi Nagasawa*, Damiani, Bologna, cat. 887.

Poli, F., 1995: *Minimalismo, Arte povera, Arte concettuale*, Laterza, Bari.

Poli, F., 2005: Premessa, *Conservare l'arte contemporanea*, O. Chiantore and A. Rava, eds., Electa, Milano.

Ricci, G., 1963: Aritmetica, *Enciclopedia della Scienza e della Tecnica*, E. Macorini, ed., vol. II, Mondadori, pp. 19–24.

Sacks, O., 1986: *L'uomo che scambiò sua moglie per un cappello*, Adelphi, Milano, cat.

Saffaro, L., 2001: Poliedri eleganti, *Matematica e Cultura 2001*, M. Emmer, ed.

Schneckenburger, M., 2000: Sculpture, *Art of the 20th Century*, I. F. Walther, ed., Taschen, Koeln, p. 456.

Vettese, A., 1998: *Capire l'arte contemporanea*, Umberto Allemandi, Torino.

Zelevansky, L., ed., 2004: *Beyond geometry. Experiments in form, 1940s-70s*, The MIT Press, Cambridge.