Bolle di sapone, complessita' e clima
Brera, 2010

Francesco Tampieri, CNR ISAC, Bologna

10 giugno 2010

1

Con questa conversazione vorrei condurvi a una passeggiata in un bosco (ricordando Eco), o un ginepraio, che parte dal considerare semplici forme eleganti della natura e ci porta fino ai sistemi complessi, e tra questi il clima globale, come esempio che e' sulla bocca di tutti.

In modo del tutto qualitativo, cerchero' di mettere in evidenza l'esistenza di un linguaggio comune - il linguaggio matematico - che sottosta' alla comprensione, o ai tentativi di comprensione, di forme e 'pattern' naturali e costruiti dall'uomo, caratterizzati da una intrinseca bellezza e da aspetti formali ricorrenti in situazioni di natura affatto diversa.

Cerchero' anche di darvi elementi per analizzare diverse visioni, ed approcci teorici, che hanno caratterizzato lo sviluppo della nostra conoscenza.

2 Forme naturali e bolle di sapone

In natura, nella varieta' delle forme di vita, e nei 'pattern' del mondo minerale, ci sono elementi matematici che si ripresentano. Ecco scheletri di un radiolario, figura 1, che si presentano come sistemi di piani disposti secondo un tetraedro, che trattengono una specie di sfera al centro. Ed ecco un sistema di pellicole di sapone che ne mima le caratteristiche: figura 2

Ci si chiede: perche' in natura troviamo certe forme e non altre? Perche' la celle degli alveari sono esagonali? Perche' le bolle di sapone formano angoli a 120 gradi quando sono libere di organizzarsi, e a 90 se a contatto con pareti rigide (vedi la figura 3)?

3 Principi di minimo ed estremi

Da sempre l'uomo ha cercato di spiegare la natura.

Partendo dall'osservazione di fenomeni spontanei, spesso complessi e caratterizzati dalla mescolanza di tanti aspetti, e' arrivato nel tempo a formulare l'idea di semplici regole, per ricavare le quali occorre pensare a raffinare l'osservazione, riducendo il fenomeno in esame alla sua essenza (questo e' il metodo scientifico di Galileo).

Citando Einstein: ″Le nuove teorie sono necessarie innanzitutto quando ci imbattiamo in fatti nuovi che non possono essere spiegati dalle teorie esistenti, ma questa motivazione per metterne in piedi nuove e', per cosi' dire, banale, imposta dall'esterno. C'e' un altro motivo, piu' sottile ma non meno importante. Esso e' il tentativo di giungere ad una unificazione e semplificazione delle ipotesi della teoria in senso globale. (Hildebrandt and Tromba, 2006, pag.20).

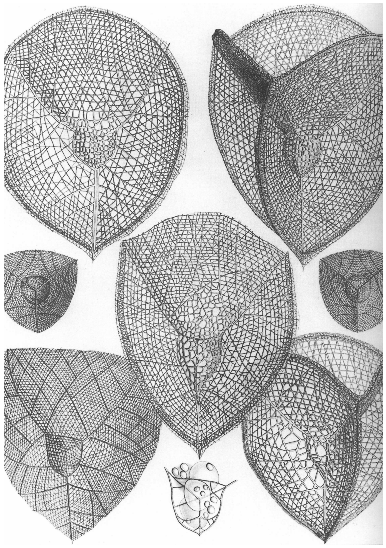

Figura 1: Disegni, del biologo tedesco Ernst Haeckel, di scheletri del radiolario Callimitra (da Hildebrandt and Tromba, 2006, pag. 19)

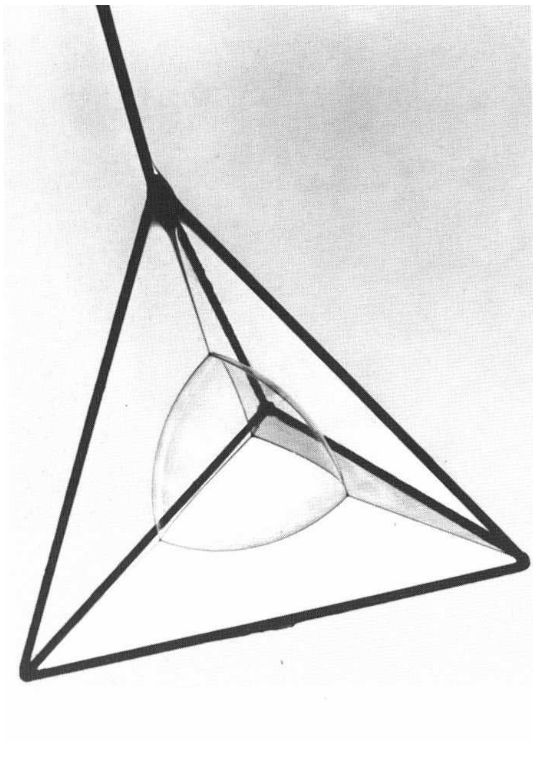

Figura 2: Pellicole di sapone in un tetraedro (da Hildebrandt and Tromba, 2006, pag. 18)

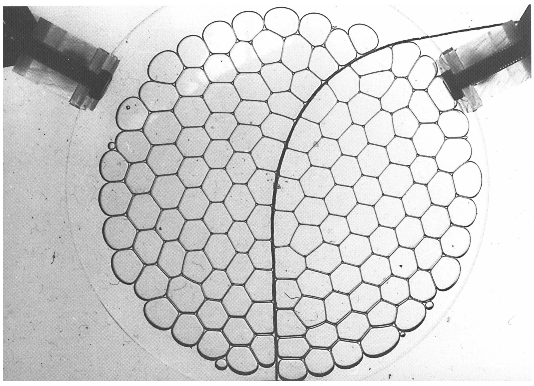

Figura 3: Hildebrandt and Tromba (2006, pag. 14; vedi anche pag. 244). La linea curva nera che attraversa il campo di bolle e' una lamina rigida.

Quando l'ggetto del nostro studio non si riconduce a semplici regole (o cosi' ci pare), si puo' cercare di darne una interpretazione globale. (In senso lato, l'uomo ha sempre voluto affrontare problemi che andavano oltre le sue conoscenze immediate.) Nel passato, lo sforzo di affrontare problemi complessi produceva spesso delle pseudospiegazioni che invocavano principi trascendenti. Curiosamente, nei casi migliori, si attribuiva un valore trascendente a principi del tutto immanenti, come nel caso del principo di minima azione.

Nel 1744 lo scienziato francese Pierre-Louis Moreau de Maupertuis formulo' uno schema del mondo, sotto forma del principio di minima azione: qualsiasi cambiamento avvenga in natura, si verifica con la minor quantita' possibile di azione.

Cosa e' l'azione? Azione = Energia x Tempo = Massa x Velocita' x Distanza percorsa.

Maupertuis intendeva questo principio come un'espressione della saggezza dell'Essere Supremo. In realta', un principio analogo, ma di portata ancor piu' generale (ai fini della soluzione dei problemi) era stato formulato anni prima da Leibniz.

Facciamo alcuni esempi connessi a questa idea.

3.1 La legge della riflessione di un raggio di luce

La luce in un mezzo omogeneo viaggia a velocita' costante; ogni fotone e' caratterizzato dalla propria energia cinetica (e qindi dalla propria massa). Applicare il principio di minima azione per studiare il percorso dei raggi di luce significa dunque trovare il percorso piu' breve tra sorgente e recettore. Dalla figura 4 potete vedere che nel caso particolare questo corrisponde a dire che l'angolo di incidenza e' uguale a quello di riflessione su uno specchio.

3.2 Come trovare vette e voragini con una livella

Identificare le sommita' delle montagne usando una livella (figura 5) e' un esperimento mentale che ci riconduce ad un problema di minimo. Pensiamo di misurare la pendenza lungo una direzione data con una livella. La pendenza del terreno e' zero sulla cima del monte, sul fondo del pozzo (o voragine). Comunque ci si sposti, la pendenza diventa negativa nei pressi della cima, positiva nel caso della voragine. E per la sella (in montagna, si direbbe un passo)? Anche qui la pendenza localmente e' zero, ma se ci si sposta ha segni diversi a seconda della direzione.

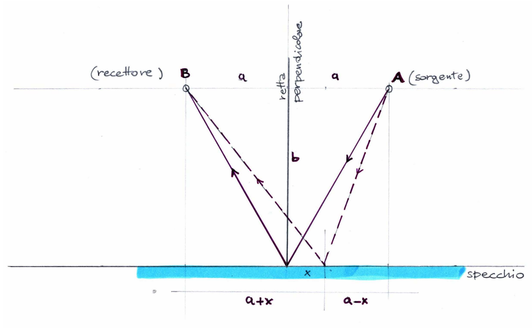

Figura 4: Dimostrazione della legge di riflessione: il percorso l da A a B e' minimo se gli angoli di incidenza e riflessione sono uguali, cioe' se $x = 0$. Infatti $l^2 = [(a-x)^2 + b^2] + [(a+x)^2 + b^2] = 2(a^2 + b^2 + x^2)$.

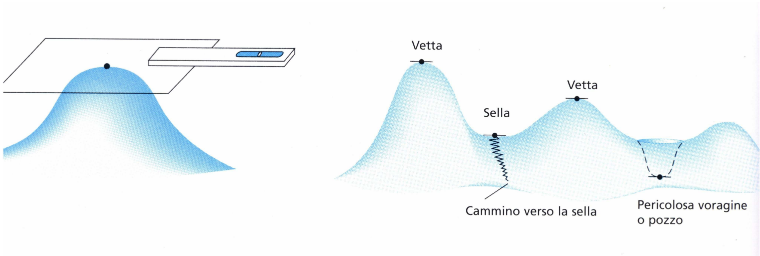

Figura 5: Come trovare le vette usando una livella. Da Hildebrandt and Tromba (2006, pag. 36).

Figura 6: Didone acquista la terra per la fondazione di Cartagine, incisione del 1630. Da Hildebrandt and Tromba (2006, pag. 66).

3.3 Massimizzare la superficie racchiusa in un perimetro di lunghezza definita

La storia della fondazione di Cartagine, ovvero il problema della regina Didone (Hildebrandt and Tromba, 2006, pag. 67). Racconta Virgilio che le era stato concesso di costruire la sua citta' sul terreno che avesse potuto delimitare con una pelle di bue (fig. 6).Dovendo risolvere il problema di massimizzare la superficie, fece tagliare la pelle a striscie sottili, le annodo' formando una unica striscia che poi dispose a semicerchio di fronte alla spiaggia (la pianta di molte citta' medievali, vedi figura 7, ricorda la stessa soluzione, vista da un altro lato: avere la superficie cittadina massima minimizzando la lunghezza, e dunque anche il costo, delle fortificazioni che la circondano e la proteggono).

3.4 Superfici e volumi dei poliedri platonici

Analogamente, la sfera ha la superficie minima fissato il volume, e rappresenta una forma di equilibrio. Consideriamo la superficie necessaria per racchiudere il volume di una sfera di raggio R:

- per un tetraedro tale superficie e' $S_t \simeq 18.72\ R^2$
- per un cubo $S_c \simeq 15.59\ R^2$
- per un icosaedro $S_i \simeq 13.37\ R^2$
- e per la sfera $S_s \simeq 12.56\ R^2$

3.4.1 un aneddoto geometrizzante, letto su Wikipedia

Esiste un curioso aneddoto riguardo Albert Einstein: ad un convegno di fisici, subissato dalle critiche per la sua balzana concezione di uno spaziotempo a quattro dimensioni, egli propose il seguente problema:

Dati sei stuzzicadenti, costruire 4 triangoli equilateri.