

Planetary boundary layer and turbulent diffusion

Francesco Tampieri
ISAC-CNR, via Gobetti 101, Bologna
francesco.tampieri@unibo.it
www.isac.cnr.it/~abl

30 settembre 2013

Indice

0.1	Avvertenza iniziale	7
1	Introduzione	8
1.1	Lo strato limite atmosferico	8
1.2	L'evoluzione diurna dello strato limite sulla terra	9
1.3	Lo strato limite marino	15
1.3.1	A qualitative description of the structure of the boundary layer over the sea	15
1.3.2	Some near-coast effects	15
1.4	'Misurare' lo strato limite	16
1.5	Why studying PBL?	17
2	Variables: notation, averages, correlation, spectra	18
2.1	Variabili stocastiche	18
2.1.1	Funzione di densita' di probabilita'	18
2.1.2	Averaging	21
2.2	Promemoria minimo sulle trasformate di Fourier	24
2.3	Funzioni di correlazione e spettri	25
2.3.1	Spettri della velocita' e spettro della correlazione	28
2.4	Some examples of spectra	28
2.5	Further remarks about averaging	29
2.5.1	Averaging time and correlation time	29
2.5.2	Averaging and spectra	34
3	The equations	37
3.1	The equations for velocity and scalars	37
3.1.1	The hydrostatic pressure	39
3.1.2	Il vento geostrofico	40
3.2	A little thermodynamics	40
3.2.1	The adiabatic gradient of temperature	41
3.2.2	Potential temperature	42
3.2.3	Virtual temperature	43
3.3	The equation for temperature	43
3.4	Equazioni del moto non dimensionali e analisi di scala	44
3.5	Le equazioni per i momenti primi	45
3.6	L'equazione per la pressione	47

3.7	Le equazioni per le fluttuazioni	47
3.8	Le equazioni per i momenti di secondo ordine	48
3.8.1	Nota sugli effetti dell'isotropia	49
3.9	L'equazione per l'energia cinetica turbolenta	51
3.10	L'equazione per la varianza di uno scalare	51
3.11	L'equazione per i flussi (cinematici) di calore	52
3.12	L'equazione per i flussi di traccianti passivi	52
3.13	L'interpretazione del termine di flusso turbolento e il modello della lunghezza di mescolamento	53
3.13.1	Una considerazione su flussi orizzontali e verticali di calore	55
3.14	A further note about 'frozen turbulence' approximation	57
4	Introduzione alla turbolenza	58
4.1	Cosa e' la turbolenza?	58
4.2	Caratteristiche universali della turbolenza: descrizione euleriana	59
4.3	Descrizione lagrangiana	61
4.4	A basic paradigm	61
4.4.1	Correlation for small lag	63
4.4.2	Some spectra and structure functions	63
4.4.3	From k to f	64
4.4.4	A few experimental correlations and time scales in the surface layer	64
4.5	La pdf della velocita'	65
4.5.1	Turbolenza omogenea, isotropa, stazionaria	65
4.5.2	La turbolenza di parete e la turbolenza convettiva	65
5	Il paradigma: lo strato limite orizzontalmente omogeneo su terreno piatto	71
5.1	Osservazioni sperimentali	71
5.2	Le equazioni per la quantita' di moto media	72
5.3	L'equazione per la temperatura potenziale media	73
5.4	'Inner' e 'outer scaling'	73
6	Lo strato limite quasi neutrale (QNBL)	75
6.1	Una annotazione introduttiva	75
6.2	Il caso della stratificazione debole	75
6.3	Le condizioni neutrale	76
6.3.1	Profilo di velocita' media nello strato superficiale	77
6.3.2	Momenti secondi, dissipazione, scale integrali	82
6.4	Lo strato di Ekman neutrale	83
6.5	Condizioni (debolmente) stratificate	86
6.5.1	Profili di velocita' e temperatura medi	86
6.5.2	Momenti secondi	88
6.5.3	Stime del coefficiente di diffusione turbolenta	89

7	Lo strato limite convettivo (CBL)	92
7.1	Introduzione	92
7.2	La funzione densita' di probabilita' (<i>pdf</i>) della velocita'	93
7.3	Analisi dimensionale direzionale e profili medi di velocita' e temperatura	93
7.4	I momenti delle componenti della velocita' e della temperatura.	98
7.4.1	Nondimensional gradient of mean velocity	98
7.4.2	Nondimensional gradient of mean temperature	99
7.4.3	I momenti di ordine due: varianze di velocita' e temperatura	100
7.5	Third order moments	108
7.5.1	$\overline{u_i^3}$	108
7.6	Fourth order moments	109
7.6.1	$\overline{u_i^4}$	109
7.7	Andamento della dissipazione di energia cinetica	112
7.8	Ancora sui flussi di calore	113
7.9	Bilancio di temperatura potenziale e altezza del CBL	113
7.9.1	The 'encroachment' model	116
7.9.2	More complex models	116
7.10	The vertical mixing in convective conditions	119
8	Lo strato residuale (RL) e la transizione giorno-notte	123
8.1	Cosa rimane del giorno?	123
8.2	Semplici modelli	123
8.2.1	The TKE decay after shut-off of the buoyancy flux	123
8.2.2	The TKE decay for a decreasing heat flux	124
8.3	Qualche risultato	125
9	Lo strato limite stabile (SBL)	129
9.1	Osservazioni introduttive	129
9.1.1	An extension: remarks from Zilitinkevich and Esau (2007)	130
9.1.2	Neutral and stable b. l. height	139
9.1.3	An example of time evolution	140
9.2	La teoria della similitudine locale	140
9.2.1	Nieuwstadt (1984) model	144
9.3	The nondimensional profiles for mean velocity and temperature	151
9.3.1	Nondimensional gradient of mean velocity	151
9.3.2	Nondimensional gradient of mean temperature	156
9.4	Second order velocity moments	157
9.5	Second order temperature moments	158
9.6	Dissipation rate	159
10	Il bilancio energetico alla superficie	160
10.1	Il bilancio	160
10.2	Il bilancio di radiazione	162
10.3	Il flusso di calore nel suolo	162

10.4	Evaporazione	166
10.5	Il bilancio energetico in aree urbane	170
10.5.1	A simple application	170
10.6	Ricavare i parametri turbolenti dello strato superficiale utilizzando il bilancio energetico	172
11	Lo strato limite interno, ovvero un prototipo di disomogeneità' orizzontale	178
11.1	Introduction	178
11.2	The change of surface roughness in the neutral b.l.	178
11.3	Extension to the diabatic case	180
11.4	Cambiamenti dei flussi di calore: un modello convettivo	181
12	Effetti topografici	188
12.1	Effetti locali ed effetti a 'larga scala'	188
12.2	Il concetto di 'inner layer' e di 'outer layer'	194
12.2.1	Chiusura per i termini di correlazione	194
12.2.2	Stima dello spessore dello strato interno ('inner layer')	195
12.2.3	Una relazione semiempirica tra perturbazione ai flussi e variazione di velocità media	196
12.2.4	Transizione alla separazione	196
13	Lo strato limite urbano	202
13.1	Qualche osservazione generale	202
13.2	Profili medi e varianze al di sopra degli edifici (entro UBL)	205
13.3	Osservazioni sulla struttura del flusso tra gli edifici (entro UCL)	211
13.3.1	'Urban canopy model'	212
13.3.2	Modellare il 'canyon' stradale	219
14	The canopy layer	225
15	An introduction to turbulent dispersion	229
15.1	The transport problem	229
15.1.1	<i>pdf</i> of positions and mean concentration	230
15.1.2	Absolute dispersion and meandering	230
15.2	Il moto browniano e la definizione del coefficiente di diffusione	231
15.3	Una soluzione dell'equazione di diffusione	233
15.4	Absolute dispersion: Taylor (1921)	234
15.5	Effetti di campi non uniformi	237
15.5.1	The mean shear example	237
15.5.2	Effetto della disomogeneità' nel campo di turbolenza: un semplice esempio	240
15.6	Dispersione relativa	240
15.6.1	Further notes about relative dispersion and meandering	243
15.7	Observations on dispersion	243
15.7.1	Some geophysical observations	243

15.7.2	CBL meandering: laboratory data	244
15.7.3	Mikkelsen et al. (1987): horizontal meandering and relative dispersion in the surface layer	244
15.7.4	Inhomogeneity effects	244
16	Modelli di dispersione	252
16.1	Preliminary observations	252
16.1.1	Note aggiuntive	253
16.2	The Thomson (1987) formulation for absolute dispersion mo- delling	253
16.2.1	The derivation of the LE equation terms	253
16.2.2	Comments and shortcomings	256
16.2.3	A solution with Gaussian p_E	257
16.2.4	A simple exercise: the 1D, homogeneous steady case with zero mean velocity	257
16.2.5	The mean shear example	261
16.2.6	Discussion of the non Gaussian case	261
16.3	A different model formulation	262
16.3.1	A simple application to the shear case	263
16.3.2	Some comments	263
17	The diffusive model: $N = 3$	264
17.1	The stochastic model for a diffusion process: the case with $N = 3$	264
17.1.1	Reduction of Eq. 16.19 to Eq. 17.2	266
17.2	The diffusion coefficient in complex flows	266
17.2.1	The diffusive limit of the Thomson (1987) solution	266
17.2.2	The multiple scale analysis for preasymptotic transport	267
17.3	Alcune soluzioni dell'equazione di diffusione	268
17.3.1	Caso 1D, sorgente puntiforme istantanea	268
17.3.2	Soluzione stazionaria per sorgente continua	269
17.4	La condizione al contorno a $z = 0$	270
18	Particelle pesanti	271
18.1	Osservazioni introduttive sugli aerosol atmosferici	271
18.2	Dinamica di singola particella	272
18.2.1	Il numero di Knudsen	272
18.2.2	La legge di attrito	273
18.2.3	Moto della particella nel campo di gravita'	276
18.2.4	Il moto browniano	278
18.3	Turbulent dispersion	280
18.3.1	Introductory observations	280
18.3.2	A simple analysis (Csanady, 1963)	281
18.3.3	The parameterisation of the integral time scales for par- ticles	282
18.4	Effetti foretici	283
18.4.1	Termoforesi	283

18.4.2	Diffusioforesi	283
19	Deposition and removal processes	290
19.1	Dry deposition	290
19.1.1	Deposizione di gas	293
19.1.2	Deposizione di aerosol	293
20	Models for turbulent flows	296
20.1	Premessa	296
20.2	Chiusure per le equazioni RANS: il modello della viscosita' turbolenta	296
20.2.1	Un esempio semplice	297
20.2.2	Una generalizzazione per il modello della viscosita' turbolenta	297
20.2.3	Il modello 'energia cinetica/dissipazione'	297
20.3	Large Eddy Simulations	298
20.3.1	Filtering	299
20.4	Filtered equations	300
20.4.1	Closure of the filtered equations: the Smagorinsky (1963) model	301
20.4.2	Behaviour in the inertial subrange	302
20.4.3	The Reynolds equation limit	302

0.1 Avvertenza iniziale

Il materiale presentato costituisce una sorta di sintesi di corsi svolti a diversi livelli ed in diverse occasioni.

Si tratta di appunti, che dovrebbero poter essere utili agli studenti del corso per seguire piu' agevolmente le lezioni. Come risulta evidente, contengono imprecisioni ed errori, parti sviluppate solo parzialmente, accenni a temi importanti che non sono stati oggetto specifico di lezione.

Gli argomenti dell'esame saranno gli argomenti presentati durante il corso, e sono un sottoinsieme di quanto contenuto in questi appunti.

Testi:

- strato limite planetario in senso stretto: Stull (1988) , Garratt (1992), Kaimal and Finnigan (1994a), Wyngaard (2010)
- dispersione: Csanady (1973), Seinfeld and Pandis (1998)
- per un approfondimento generale: Monin and Yaglom (1971), Monin and Yaglom (1975), Tennekes and Lumley (1972), Pope (2000)

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Lo strato limite atmosferico

The atmospheric boundary layer (ABL), or planetary boundary layer (PBL), is that portion of the atmosphere affected by the presence and properties of the underlying surface.

Often, but not always, the interaction with the ground or the sea determines the features of the PBL. In that cases, measurements near the surface are enough to define the whole structure of the PBL. Because it is easier to make measurements near the surface, our deepest knowledge of PBL's is limited to those affected by the surface itself. However, attention must be paid to more complex situations, in which influences from aloft are important in the PBL dynamics. Qualitativamente la Fig. 1.1 e la Fig. 1.2 illustrano la differenza di struttura tra uno strato limite raffreddato dal suolo e uno riscaldato dal suolo.

The depth h of the PBL identifies the height of this layer. h varies typically from $10^1 m$ to $10^3 m$. If PBL is mainly affected by surface-atmosphere interaction, h may be defined as the height at which turbulent fluxes go to zero. It must be said that this quantity cannot be univocally defined and can vary for the different quantities (momentum, heat, passive scalars).

In una posizione data, le caratteristiche del flusso dipendono dai campi delle variabili; dipendono esclusivamente dalla distanza dalla superficie e dal tempo in condizioni di omogeneità orizzontale. L'omogeneità spaziale orizzontale viene meno in situazioni di topografia complessa, di cambiamenti di caratteristiche della superficie, in presenza di strutture (città). La non stazionarietà è associata alla variabilità delle condizioni meteorologiche ed alla forzatura energetica (ciclo diurno), but more importantly is intrinsic in the nature of the governing equations. In mancanza di adeguate possibilità sperimentali, per l'interpretazione e la modellazione di dati si assume che le ipotesi di omogeneità e di stazionarietà siano verificate con sufficiente accuratezza.

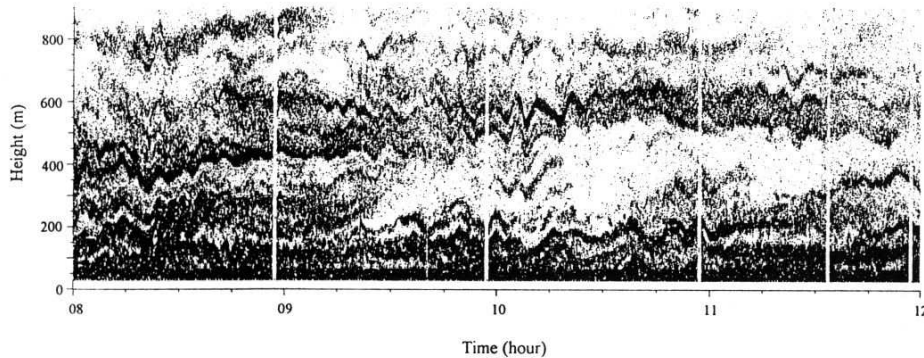


Figura 1.1: Fac-simile dell'eco SODAR per uno strato limite stabile: il suolo raffredda l'aria sovrastante (Argentini et al., 1996). (Le zone scure indicano intensita' di risposta elevata.) Appaiono strutture oscillanti (nel tempo), ed elevati gradienti in verticale.

Lo strato limite atmosferico nel suo complesso (in 'bulk') e' caratterizzato in generale da numeri di Reynolds alti: se $U = 5m/s$ (velocita' del vento), $L = 100m$ e $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}m^2/s$ risulta $\mathcal{R}_e = UL/\nu = 3 \cdot 10^7$. Il flusso e' turbolento; la descrizione matematica che ne verra' data in questi appunti e' basata sul formalismo delle variabili stocastiche.

Nelle vicinanze di superfici rigide (p.es. al suolo) la velocita' si riduce e le scale spaziali del moto si riducono: $\mathcal{R}_e = O(1)$ per $UL \sim 10^{-5}m^2/s$: una distanza di $1mm$ dalla parete, con una velocita' di $1cm/s$. Questo suggerisce che la viscosita' del fluido e, piu' in generale, le sue proprieta' molecolari diventano rilevanti nei processi di scambio tra superficie e atmosfera (per esempio, nella deposizione di inquinanti).

Analoghe considerazioni valgono per gli effetti della rotazione: in generale il numero di Rossby e' grande: $\mathcal{R}_o \equiv U/fL > 10^2$ se $L > 1km$ e l'accelerazione di Coriolis (l'effetto della rotazione della Terra) puo' essere trascurata. Tuttavia, se la velocita' si riduce l'accelerazione puo' diventare importante (per esempio in valli, o sulle citta').

1.2 L'evoluzione diurna dello strato limite sulla terra

Poiche' lo strato limite si adatta ai cambiamenti della superficie sottostante in tempi brevi (per esemplificare, dell'ordine di 1 ora), la presenza di un ciclo di riscaldamento diurno e' rilevante per lo strato limite che si sviluppa sul suolo. (Poiche' la temperatura dell'acqua marina non e' sostanzialmente influenzata dal ciclo diurno, sul mare lo spessore e le caratteristiche dello strato limite

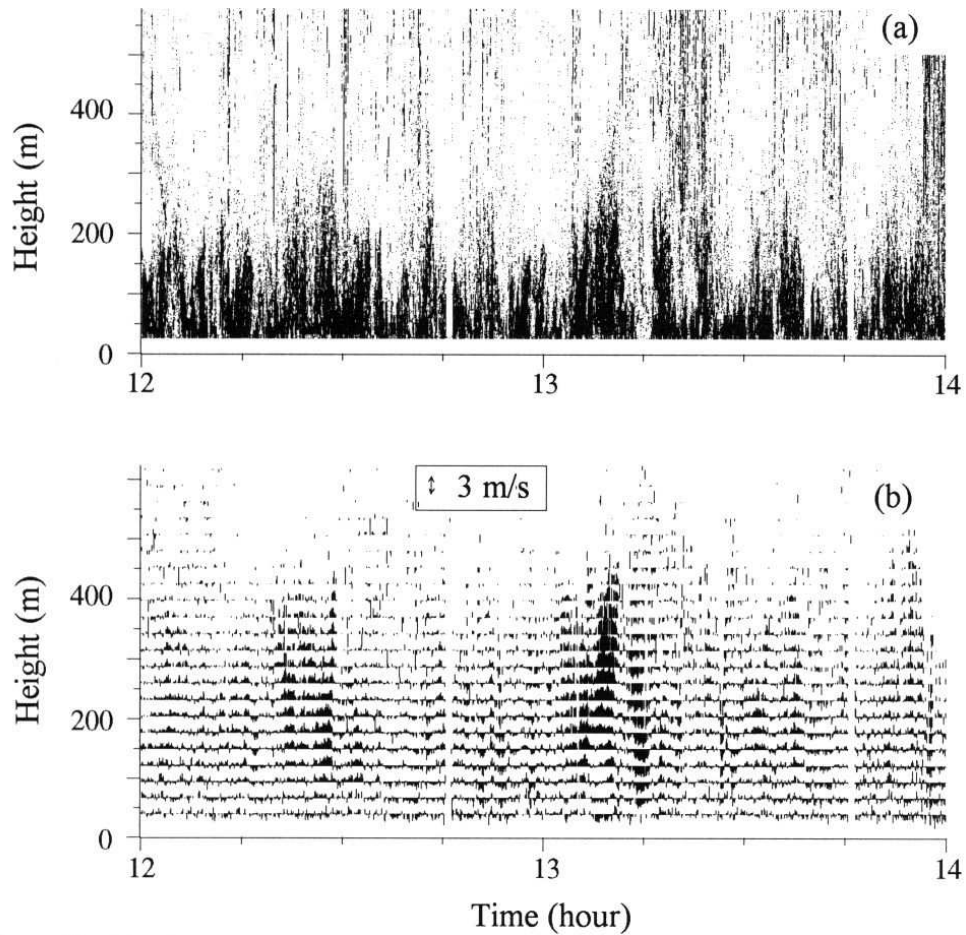


Figura 1.2: Fac-simile dell'eco SODAR per uno strato limite convettivo: il suolo riscalda l'aria sovrastante (Argentini et al., 1996). Sono evidenti strutture coerenti in verticale e variabili nel tempo. La parte inferiore della figura mostra la stima delle velocità verticali istantanee alle diverse quote, rafforzando l'immagine di uno strato caratterizzato da moti relativamente coerenti in verticale e variabili nel tempo.

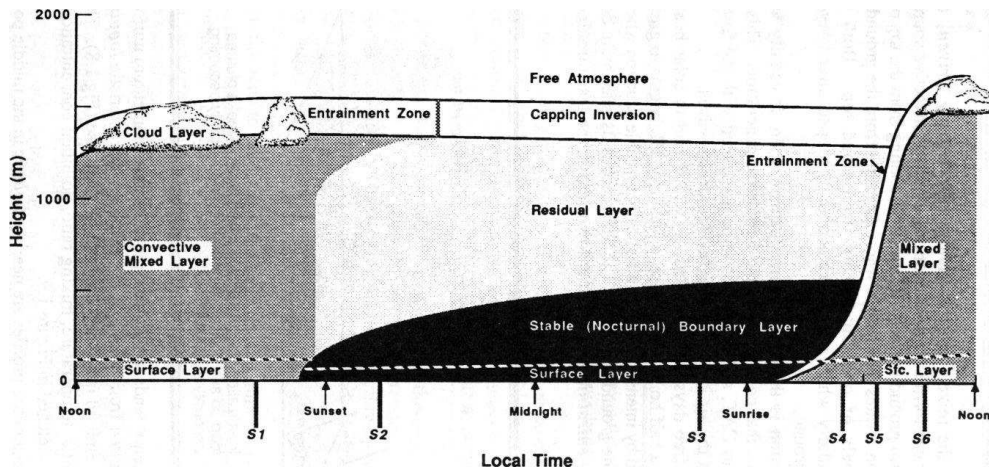


Figura 1.3: Evoluzione diurna idealizzata della altezza dello strato limite su suolo, in funzione del tempo. Lo schema mette in evidenza lo strato convettivo, quello stabile e lo strato residuale (Stull, 1988).

sono principalmente dovute ad effetti sinottici). L'evoluzione idealizzata dello strato limite sulla terra in condizioni di alta pressione e' rappresentata in Fig. 1.3.

Nelle Figure 1.4 e 1.5 e' riportata l'evoluzione dello strato limite a Tor Vergata (Roma) durante una giornata estiva (24 giugno 2005) mediante dati sodar (e quindi traccia dei processi convettivi attraverso le fluttuazioni di densita' dell'aria) e dati lidar (che tracciano la presenza di particelle di aerosol). Dai dati si vede un rapido innalzamento del PBL tra le 7 e le 9 UTC (ora del lidar, il sodar e' in ora locale non legale=UTC+1), una quasi totale assenza di vento fino alle 12 UTC (0.5 m/s) poi una rotazione antioraria del vento che prima porta aria dalla citta' (ore 11.30-12.30 UTC) per poi stabilizzarsi da SW in una costante circolazione di brezza (2-4 m/s). I punti bianchi sul grafico lidar rappresentano i livelli di cambiamento di pendenza del segnale, e quindi segnalano la presenza di strati. Finquando il sodar ha segnale i due strumenti seguono l'innalzamento del PBL in modo molto simile. Alle 8.30 UTC (175.35) l'altezza dello strato limite h e' di 500m. Piu' tardi h arriva a 1400 m e non e' piu' rilevata dal sodar. E' interessante l'aumento di backscatter e di h nel plume proveniente dalla citta' (attorno alle 12). Notare anche la formazione, indotta dalla brezza pomeridiana, di un PBL interno (fino a 300-500 m, visibile su entrambi i tracciati) mentre sopra permane stabile il PBL (esterno) a circa 1400m. Sia il sodar che il lidar rivedono l'abbassamento del PBL interno dopo le 20 UTC. (G.P. Gobbi, comunicazione personale).

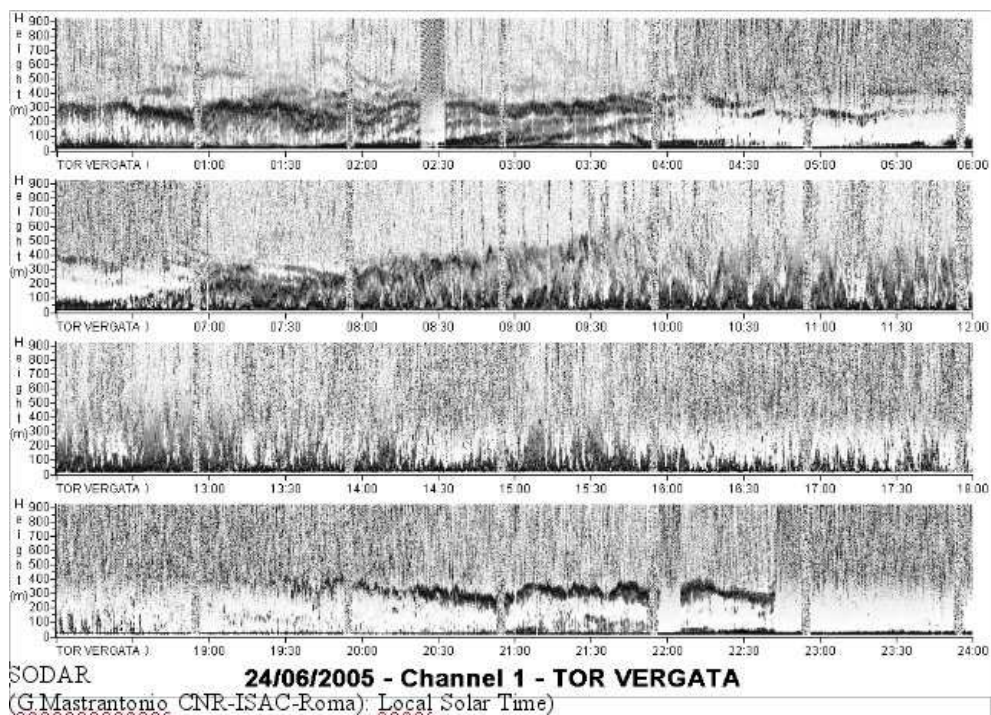


Figura 1.4: Tracciato sodar, sito di Roma Tor Vergata, 41.84 N, -12.65 E, 120 m s.l.m.; 24 giugno 2005. Ascisse in ora locale (=ora solare). Dati di G. Mastrantonio, ISAC CNR.

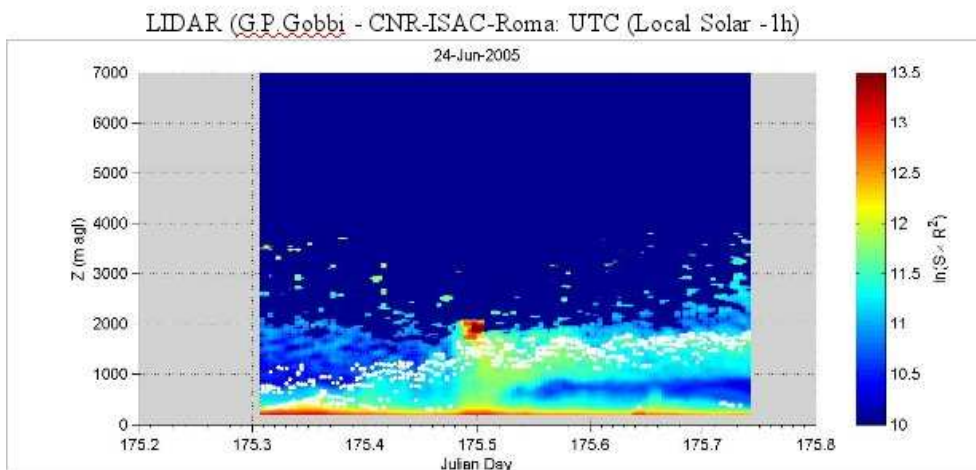


Figura 1.5: Segnale lidar, relativo alla parte centrale della figura 1.4. Ascissa in giorni giuliani: il tempo e' espresso in UTC, corrispondente all'ora locale meno 1 ora. Dati di G. P. Gobbi, ISAC CNR.

Nelle Fig. 1.6 e 1.7 sono riprodotti i profili di temperatura potenziale e di vento corrispondenti a differenti periodi del giorno.

Si osservano tipicamente tre diverse situazioni:

- lo strato limite convettivo ('convective boundary layer', CBL), in cui la turbolenza e' generata dal flusso di calore alla superficie, che rende il profilo di temperatura virtuale superadiabatico (instabile) nei pressi del terreno e quasi adiabatico nella zona centrale, ben mescolata; il raffreddamento degli strati piu' alti favorisce lo sviluppo di una inversione in temperatura ('capping inversion'). Analogamente il gradiente del vento ('wind shear') e' debole nella parte centrale, e puo' essere grande presso il suolo e negli strati piu' alti, dove genera instabilita' (tipo Kelvin-Helmoltz) e turbolenza.
- lo strato limite stabile ('stable boundary layer', SBL), in cui la turbolenza e' prodotta dal gradiente del vento ed e' smorzata dalla stratificazione stabile di densita'. In condizioni di grande stabilita', ed in assenza di 'shear', la turbolenza puo' scomparire, o verificarsi intermittenza. Il vento presenta di solito elevati gradienti verticali di velocita'; ai livelli inferiori si possono formare massimi locali di velocita' ('low level jet', LLJ), la cui presenza e' segno del parziale disaccoppiamento tra l'atmosfera e il suolo. Spesso si osservano fenomeni di tipo ondoso (onde di gravita') e altre instabilita' idrodinamiche: fenomeni di carattere non locale che caratterizzano la turbolenza.
- lo strato residuale ('residual layer', RL) e' cio' che rimane dello strato convettivo dopo il tramonto, al di sopra dello strato stabile che si sviluppa al contatto col terreno. All'interno di questo strato la turbolenza decade nel tempo, essendo venuta meno la forzatura termica. Si noti che lo strato residuale non e' un vero strato limite, poiche' la sua evoluzione non e' direttamente influenzata dai flussi di energia al suolo.

Lo strato limite si avvicina alla neutralita' quando gli scambi di calore tra aria e superficie sono minimi. Questo si realizza evidentemente con masse d'aria in equilibrio termico con la superficie (per esempio sul mare, o su grandi estensioni uniformi in assenza di effetti radiativi) e comunque quando lo scambio dovuto alla turbolenza e' intenso.

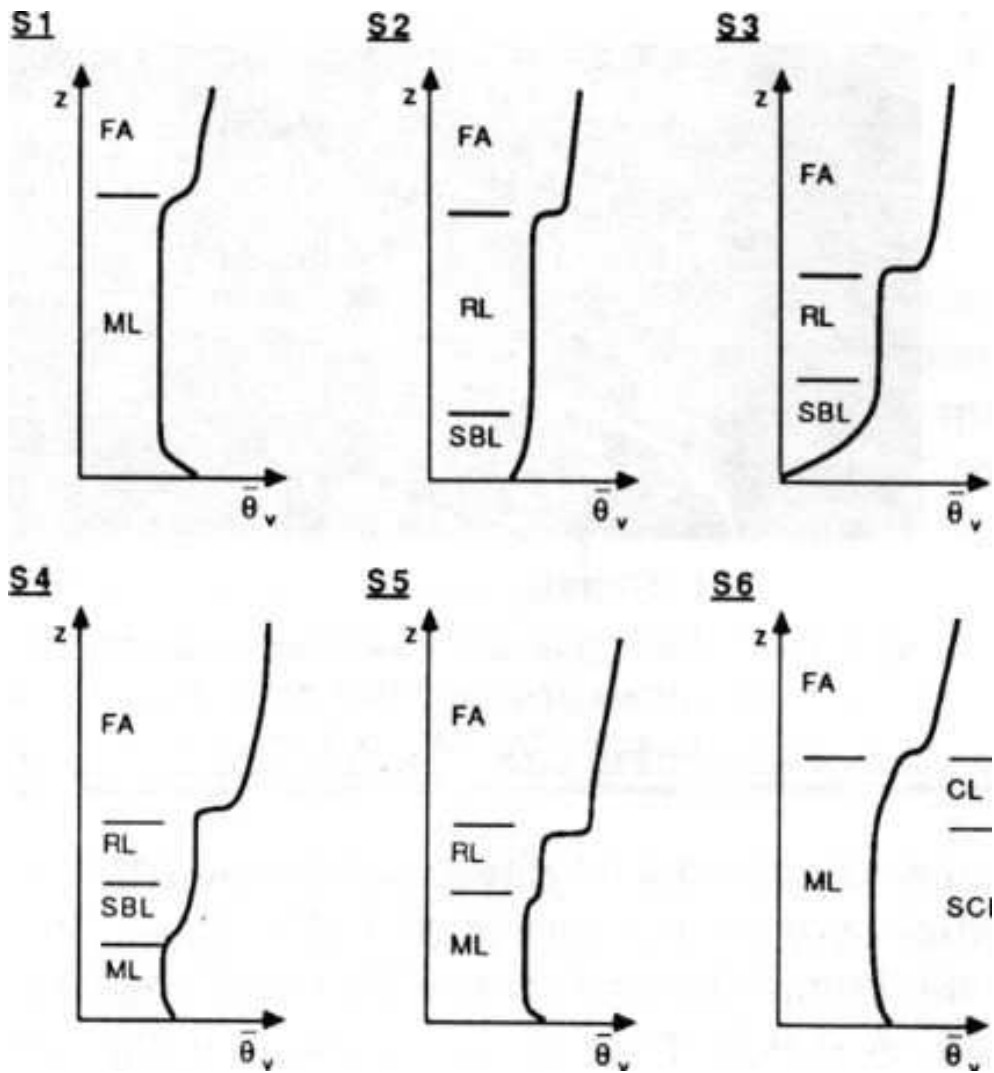


Figura 1.6: Profili idealizzati di temperatura potenziale (a) e di vento (b) corrispondenti a diversi istanti di tempo, per la situazione illustrata in Fig. 1.3 (Stull, 1988).

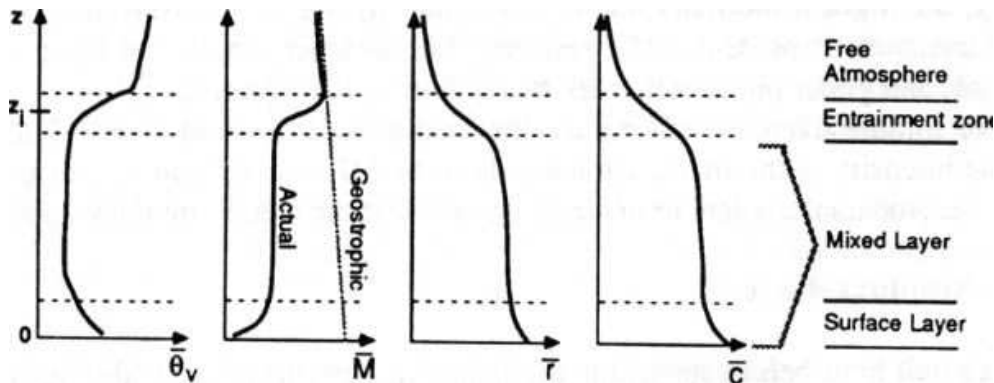


Figura 1.7: Profili 'tipici' di temperatura potenziale, vento, umidità e concentrazione di un tracciante nello strato limite convettivo (Stull, 1988).

1.3 Lo strato limite marino

1.3.1 A qualitative description of the structure of the boundary layer over the sea

A fair description of the marine boundary layer (MBL) is reported by Garratt (1992). Due to the presence of water, the main features that distinguishes MBL from the continental counterpart are:

- the presence of a mobile lower boundary, which state adjusts to a certain extent to the dynamics
- the constant presence of moisture
- the realization of homogeneous and steady conditions, apart from the coastal regions and/or in presence of cold/warm outbreaks. In particular, the diurnal cycle is small;
- the small excursions from near-neutral conditions: surface heat flux in general does not affect the boundary layer structure

1.3.2 Some near-coast effects

- internal boundary layer near the coastal line: a situation that occurs for instance during night, in presence of a land breeze, cold air blowing over a warmer sea: unstable internal b.l. see Gryning and Batchvarova (2002);
- sea breeze and internal boundary layer: Plant and Atkinson (2002)
- large scale turbulence and vortices in the wake of isolated islands/coastal hills: Fig. 1.8

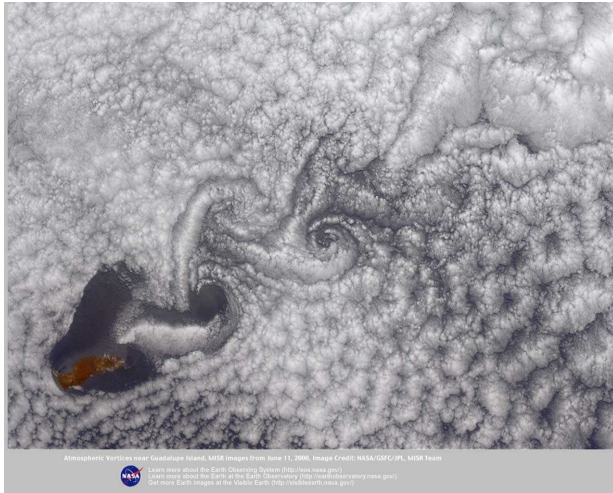


Figura 1.8: Clouds evidence the vortexes downwind Guadalupe island

- double layer structure: see Johansson et al. (2005)

1.4 'Misurare' lo strato limite

Tre classi di metodi:

- misure in campo (limitazioni: non stazionarieta' dei processi \Rightarrow limitazioni al tempo di campionamento, disomogeneita' spaziali \Rightarrow difficolta' ad interpretare i risultati in termini teorici, limitata conoscenza delle condizioni al contorno)
- esperimenti di laboratorio (vantaggi: controllo delle condizioni sperimentali, ripetibilita', stazionarieta'; problemi: in generale non possono essere soddisfatte tutte le riduzioni di scala)
- simulazioni numeriche (simulazione di processi con la possibilita' di selezionare gli aspetti rilevanti; difficolta' legate alle approssimazioni introdotte per la soluzione delle equazioni e/o per la parametrizzazione di alcuni fenomeni fisici)

Strumenti:

- misure locali: vari tipi di anemometri (in part., anemometri sonici), misuratori di scalari: la tendenza e' verso strumenti ad alta frequenza di campionamento per risolvere la turbolenza
- misure indirette, telerilevate: sodar, lidar, wind profiler, radar; strumenti basati al suolo o montati su aerei o satelliti

1.5 Why studying PBL?

- research: geophysical flows are characterised by high Reynolds numbers
= ζ well developed turbulence
- applications
 - NWF and climate models: exchange of momentum, heat, water vapour and tracers from the surface to the free atmosphere
 - AQ (atmospheric composition) models: natural sources of dust and sea salt, concentration of pollutants emitted near the ground
 - wind energy production
 - transports (airports, fast trains, icing of roads and motorways, ...)
 - architecture and urbanistics
 - sport issues (sailing, ...)

Capitolo 2

Variables: notation, averages, correlation, spectra

2.1 Variabili stocastiche

Pur conoscendo le equazioni differenziali che governano il moto, in generale la loro soluzione non e' nota ne' analiticamente ne' numericamente. In questo studio della turbolenza atmosferica si assume che le variabili (esempio in Fig. 2.1) che la descrivono siano variabili stocastiche. Una discussione circa questo problema si trova in Frisch (1995, cap. 3).

2.1.1 Funzione di densita' di probabilita'

La descrizione in termini stocastici implica la conoscenza della funzione di distribuzione ('probability density function' *pdf*) delle variabili: per ciascuna variabile scalare o vettoriale ζ avremo:

$$pdf(\zeta) = p(\zeta; \mathbf{x}, t, \mathbf{r}, \tau) \quad (2.1)$$

il che significa che in generale la funzione di distribuzione della variabile considerata e' funzione della posizione \mathbf{x} , del tempo t , e dipende dal valore assunto dalla variabile stessa nei punti circostanti, di coordinate $\mathbf{x} + \mathbf{r}$, o ad istanti precedenti $t - \tau$.

Se ζ e' uno scalare, p e' la derivata della funzione di distribuzione cumulativa P , definita da

$$P(\zeta) = \text{probabilita'}(u < \zeta) \quad (2.2)$$

e dunque

$$p(\zeta) = \frac{\partial P}{\partial \zeta} \quad (2.3)$$

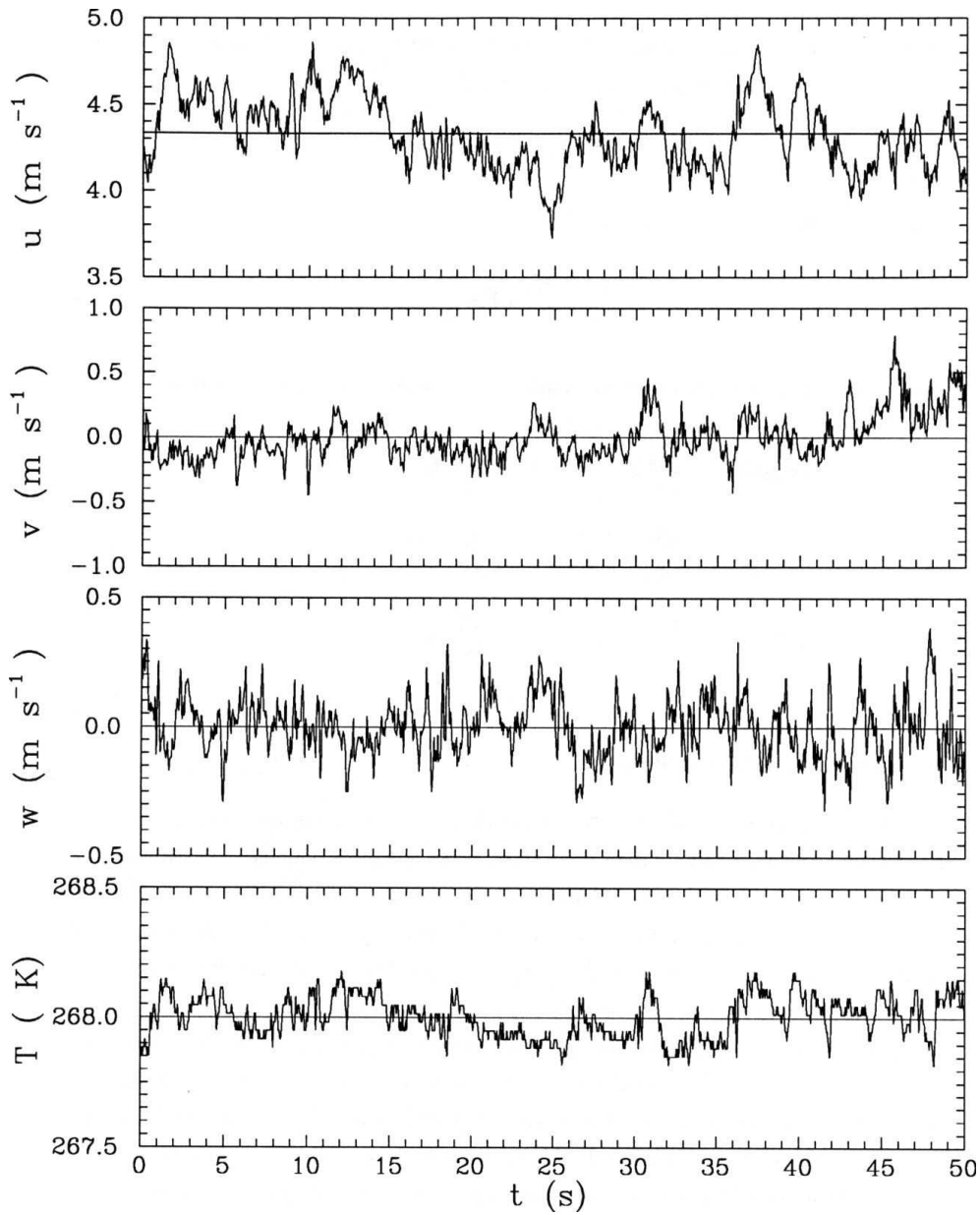


Figura 2.1: Registrazione delle tre componenti della velocità dell'aria e della temperatura, nello strato limite superficiale, da Trombetti and Tagliazuca (1994). La registrazione ad alta frequenza (dati originali: 10 Hz) mette in evidenza il carattere fluttuante delle variabili, la differenza tra le varianze delle componenti u' e w' , la correlazione nel tempo (intuitivamente maggiore per u' rispetto a w').

Nota $p(\zeta)$, con $-\infty < \zeta < \infty$, si possono calcolare i momenti di ordine n

$$\bar{\zeta}^n = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^n p(\zeta) d\zeta \quad (2.4)$$

dove $n = 0$ fornisce la condizione di normalizzazione $\int_{-\infty}^{\infty} p(\zeta) d\zeta = 1$, $n = 1$ il valore medio, ecc. Questi momenti sono calcolati sull'insieme delle realizzazioni del processo in esame.

Definiamo la varianza σ^2

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\zeta - \bar{\zeta})^2 p(\zeta) d\zeta = \bar{\zeta}^2 - \bar{\zeta}^2 \quad (2.5)$$

la skewness

$$S_k = \frac{\overline{(\zeta - \bar{\zeta})^3}}{\sigma^3} \quad (2.6)$$

e la kurtosis

$$K_u = \frac{\overline{(\zeta - \bar{\zeta})^4}}{\sigma^4} \quad (2.7)$$

Una distribuzione gaussiana e' caratterizzata da $S_k = 0$ e $K_u = 3$.

Si definisce la funzione di probabilita' cumulativa per due variabili

$$P_{12}(\zeta_1, \zeta_2) = \text{probabilita}'(u_1 < \zeta_1, u_2 < \zeta_2) \quad (2.8)$$

per cui

$$p_{12}(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{\partial^2 P_{12}}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} \quad (2.9)$$

La funzione di densita' di probabilita' marginale

$$p_2(\zeta_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{12}(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 \quad (2.10)$$

I momenti sono definiti analogamente a prima. Notiamo l'espressione per la covarianza

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\zeta_1 - \bar{\zeta}_1)(\zeta_2 - \bar{\zeta}_2) p_{12} d\zeta_1 d\zeta_2 = \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2 - \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2 \quad (2.11)$$

2.1.2 Averaging

See Finnigan and Shaw (2008) for a detailed discussion about averaging.

In order to have informations about the *pdf* it is necessary to take averages from the observations. Similarly, when dealing with the governing equations, it is interesting to have solutions for the moments, if no direct numerical simulations are performed or approximate equations are solved.

La conoscenza empirica della *pdf* si riduce usualmente alla conoscenza dei suoi primi momenti, ad un punto (o ad un istante) e a due punti (o a due istanti). Per quanto riguarda la velocita', i momenti ad un punto danno indicazioni locali ed istantanee delle caratteristiche del moto (quantita' medie, energia cinetica, ecc.); quelli a due punti (a due tempi) sulla struttura spaziale (temporale) del campo di moto. Analoghe considerazioni valgono per i momenti delle quantita' scalari.

Moments computed at fixed space reference coordinates (possibli depending on time) describe the fields (Eulerian description). Moments can also be computed following the fluid (particel) motion (Lagrangian description).

La variabile ζ e' rappresentata dalla somma del suo valore medio e della fluttuazione rispetto ad esso:

$$\zeta = \bar{\zeta} + \zeta' \quad (2.12)$$

Ensemble and time average

The ensemble average means that a number of different realizations of the same process is available, and the statistical properties of this ensemble of realizations are investigated (Monin and Yaglom, 1971). Ensemble averaging is approximately possible with laboratory observations, not with geophysical observations. With some caveats, it can be realized using numerical solutions of the governing equations. Define the average over an ensemble of N realizations of the variable ζ :

$$\bar{\zeta}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \zeta^{(i)}(\mathbf{x}, t) \quad (2.13)$$

The following rules hold:

$$\overline{\zeta_1 + \zeta_2} = \bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2 \quad (2.14)$$

$$\overline{\zeta'} = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \xi} = \bar{\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}} \quad (2.16)$$

for any independent variable ξ (derivative commutes with averaging).

If the variable $\zeta(t)$ is statistically steady, the time average is

$$\bar{\zeta}(\theta) = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{\theta - \mathcal{T}/2}^{\theta + \mathcal{T}/2} \zeta(t) dt \quad (2.17)$$

being \mathcal{T} the averaging time. Real observations are in general unsteady: thus \mathcal{T} must be chosen smaller than the characteristic time of occurrence of unsteadiness. Remember also that as far as observations and numerical solutions are concerned, the variable time is discretized.

The time averaging is expected to converge to ensemble averaging for steady processes at increasing averaging time.

Commutative property holds with respect to the time derivative. Applying Leibniz theorem:

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \theta} = \frac{1}{\mathcal{T}} [\zeta(\theta + \mathcal{T}/2) - \zeta(\theta - \mathcal{T}/2)] + \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{\theta - \mathcal{T}/2}^{\theta + \mathcal{T}/2} \frac{\partial \zeta(t)}{\partial \theta} dt \quad (2.18)$$

and the last integral is zero. Also:

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} \equiv \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{\theta - \mathcal{T}/2}^{\theta + \mathcal{T}/2} \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt = \frac{1}{\mathcal{T}} [\zeta(\theta + \mathcal{T}/2) - \zeta(\theta - \mathcal{T}/2)] \quad (2.19)$$

An elementary example

Let consider a signal

$$\zeta(t) = a_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_1}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_2}\right) \quad (2.20)$$

The time average over \mathcal{T} is

$$\bar{\zeta}^{(\mathcal{T})}(\theta) = \frac{a_1 T_1}{\pi \mathcal{T}} \sin\left(\frac{\pi \mathcal{T}}{T_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi \theta}{T_1}\right) + \frac{a_2 T_2}{\pi \mathcal{T}} \sin\left(\frac{\pi \mathcal{T}}{T_2}\right) \cos\left(\frac{2\pi \theta}{T_2}\right) \quad (2.21)$$

Usually, in Eq. 2.20 time is discretized over the sampling time, or the time step of a numerical integration, and in Eq. 2.21 it is discretized over the averaging time.

Consider $T_1 \gg T_2$. If $\mathcal{T} \ll T_1$ and equal or greater than T_2 the averaged function reproduces the part slowly changing (with longer period) and fluctuations reproduce the shorter period signal. Increasing \mathcal{T} amplifies the fluctuations and reduces the amplitude of the averaged signal: see Fig. 2.2

Volume averaging

In numerical modelling discretization in space (for instance) implies that the variables refer to a finite volume. They should be considered volume averaged, and this implies a filtering in the wavenumber spectrum (which will be discussed later).

The earlier filtering formalism was introduced in connection with the first numerical weather simulations (Deardorff, 1970), see also Pope (2000, pag. 576).

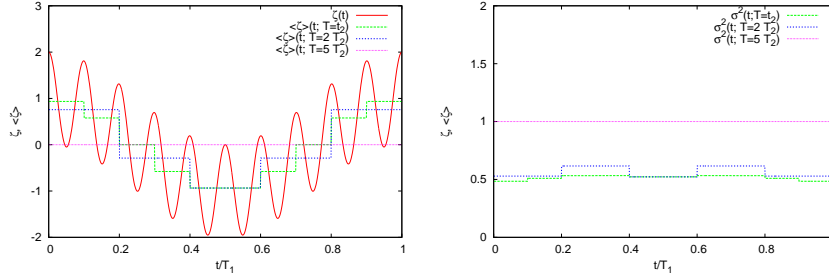


Figura 2.2: Left: the original signal, Eq. 2.20 for $a_1 = a_2 = 1$, $T_2 = T_1/10$ and the averaged signals with $\mathcal{T} = (0.1, 0.2, 0.5) T_1$. Right: variances of fluctuations for the same averaging times as before.

Let consider velocity as example. $\bar{\mathbf{u}}$ is the velocity averaged over a rectangular cell of sides h_1, h_2, h_3 . Thus

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \int_{x_1-h_1/2}^{x_1+h_1/2} \int_{x_2-h_2/2}^{x_2+h_2/2} \int_{x_3-h_3/2}^{x_3+h_3/2} \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) dx'_1 dx'_2 dx'_3 \quad (2.22)$$

Note that this filter is anisotropic even if the grid spacing is the same in the three directions.

The same commutative property holds as for time averaging.

Notation

In queste note le quantita' medie verranno indicate con $\bar{\zeta}$ nelle equazioni del moto. Diversi simboli di media verranno impiegati solo quando necessario per evitare equivoci.

Il vettore velocita' viene espresso da:

$$\mathbf{u} = (u, v, w) = (u_1, u_2, u_3) = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad (2.23)$$

dove le differenti notazioni vengono usate a seconda della convenienza, riferendosi alle coordinate x, y, z oppure a $x_i, i = 1, 2, 3$.

Si suppone inoltre che esista un profilo medio di densita' rappresentativo, eventualmente caratterizzato da un gradiente medio: $\rho_a(z) = \rho_{00} + \rho_0(z)$. Motivo di interesse e' l'allontanamento dallo stato indisturbato; la densita' del fluido e' descritta da:

$$\rho_f = \rho_{00} + \rho_0(z) + \rho(x, y, z, t) = \rho_a(z) + \rho(x, y, z, t) \quad (2.24)$$

dove

$$\rho(x, y, z, t) = \overline{\rho(x, y, z, t)} + \rho'(x, y, z, t) \quad (2.25)$$

Viene analogamente considerata la temperatura dell'aria T_f e un profilo di riferimento $T_a(z) = T_{00} + T_0(z)$:

$$T_f = T_a(z) + T(x, y, z, t) \quad (2.26)$$

e

$$T = \bar{T} + T' \quad (2.27)$$

In a similar way: $p_f = p_a + p = p_a + \bar{p} + p'$.

2.2 Promemoria minimo sulle trasformate di Fourier

Definisco la trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}[f(t); x] \equiv \hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-ixt) dt \quad (2.28)$$

e naturalmente

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) \exp(+ixt) dx \quad (2.29)$$

Si ha che

$$\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}; x\right] = ix\hat{f}(x) \quad (2.30)$$

Per funzioni $f(t)$ reali (come si verifica nel caso attuale, p. es. f puo' essere una componente della velocita') vale la relazione, avendo definito z^* il complesso coniugato di z :

$$\begin{aligned} \hat{f}^*(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(+ixt) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t) \exp(-ixt) dt \equiv \mathcal{F}[f(-t); x] \end{aligned} \quad (2.31)$$

Per funzioni $f(t)$ pari: $f(t) = f(-t)$, si ha

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt \quad (2.32)$$

e naturalmente

$$f(t) = 2 \int_0^{+\infty} \hat{f}(x) \cos(xt) dx, \quad t \geq 0 \quad (2.33)$$

Definisco anche la convoluzione tra due funzioni $f(t)$ e $g(t)$:

$$f \circ g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau \quad (2.34)$$

e vale il teorema (vedi, p.es. Gradshteyn and Ryzhik, 1980, pag. 1147)

$$\hat{f}(x)\hat{g}(x) = \mathcal{F}[f \circ g(t); x] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f \circ g \exp(-ixt) dt \quad (2.35)$$

2.3 Funzioni di correlazione e spettri

Considero le fluttuazioni della velocità attorno al proprio valore medio, Eq. 2.23: $u'_i = u_i - \bar{u}_i$. Il tensore di correlazione della velocità misurata in due punti \mathbf{x} e $\mathbf{x} + \mathbf{r}$, allo stesso istante di tempo, è definito da

$$R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \overline{u'_i(\mathbf{x})u'_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})} \quad (2.36)$$

(si ricordi che si tratta di una media d'insieme, almeno in linea di principio).

Sotto condizioni molto generali (vedi Batchelor, 1953, pag. 25) esiste una trasformata di Fourier della funzione di correlazione spaziale:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.37)$$

dove $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ è il vettore d'onda. Naturalmente

$$R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k} \quad (2.38)$$

In generale i tensori R_{ij} e Φ_{ij} dipendono anche dalla posizione \mathbf{x} : in condizioni di omogeneità spaziale dipendono solamente dalla separazione \mathbf{r} e dal numero d'onda \mathbf{k} , rispettivamente.

In modo analogo definiamo la correlazione della velocità a due istanti di tempo t e $t + \tau$, in un punto \mathbf{x} :

$$R_{ij}(\tau, t, \mathbf{x}) = \overline{u'_i(\mathbf{x}, t)u'_j(\mathbf{x}, t + \tau)} \quad (2.39)$$

a cui corrisponde la trasformata di Fourier (in realtà E_{ij} è il doppio della trasformata di Fourier definita come per Φ)

$$E_{ij}(\omega, t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\tau, t, \mathbf{x}) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (2.40)$$

Ancora:

$$R_{ij}(\tau, t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_{ij}(\omega, t, \mathbf{x}) \exp(i\omega\tau) d\omega \quad (2.41)$$

Correlazioni e spettri dipendono in generale dall'istante di tempo e dalla posizione. La dipendenza, indicata esplicitamente, si riferisce a variazioni su scale più grandi dell'intervallo su cui si esegue la trasformata.

In condizioni di omogeneità e stazionarietà, la correlazione e lo spettro dipendono da $|\tau|$ e da $|\omega|$, rispettivamente e sono funzioni pari. Quindi, per una direzione generica:

$$E(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(r) \cos(kr) dr \quad (2.42)$$

$$R(r) = \int_0^\infty E(k) \cos(kr) dk \quad (2.43)$$

and in time:

$$E(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(t) \cos(\omega t) dt \quad (2.44)$$

$$R(t) = \int_0^\infty E(\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad (2.45)$$

Sempre in condizioni di omogeneita' e stazionarieta', l'integrale della funzione di correlazione a due punti definisce la scala spaziale della turbolenza (l'indice k in alto ricorda che si e' integrata la funzione di correlazione lungo una direzione specifica):

$$L_{ij}^{(k)} = \frac{1}{u'_i u'_j} \int_0^\infty R_{ij}(\mathbf{r}) dr_k \quad (2.46)$$

e l'integrale della funzione di correlazione a due tempi definisce la scala temporale della turbolenza:

$$T_{ij} = \frac{1}{u'_i u'_j} \int_0^\infty R_{ij}(\tau) d\tau \quad (2.47)$$

L'esistenza di queste scale (ovvero, la convergenza degli integrali nelle Eq. 2.46 e 2.47) e' legata per lo meno a condizioni di omogeneita' e/o stazionarieta' su distanze e/o tempi maggiori delle rispettive scale. In altre parole, per utilizzare queste scale occorre che la *pdf* euleriana delle velocita' non si modifichi su scale comparabili a queste. Analoghe considerazioni valgono parlando di spettri.

In particolare, dalla Eq. 2.44, e tralasciando gli indici:

$$E(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(t) dt = \frac{2}{\pi} T \overline{u'^2} \quad (2.48)$$

and from Eq. 2.45:

$$R(0) \equiv \overline{u'^2} = \int_0^\infty E(\omega) d\omega \quad (2.49)$$

Thus $E(\omega) d\omega$ can be interpreted as the contribution from the frequency range $\omega, \omega + d\omega$ to the total velocity variance.

La definizione 2.39 puo' essere generalizzata per definire la correlazione tra le velocita' in due punti ed a due tempi diversi. Di questa generalizzazione si ha bisogno per esempio nello studio della dispersione. Se il flusso e' omogeneo e stazionario, ci si riconduce alle considerazioni precedenti; in generale l'uso di questi strumenti di analisi richiede che il flusso si modifichi su scale spaziali e/o temporali abbastanza grandi rispetto alle scale integrali.

Lo studio sperimentale della forma di R_{ij} e' in linea di principio fattibile in laboratorio o in campo, con qualche limitazione.

In condizioni sperimentali in campo si puo' disporre, per esempio, di un certo numero di anemometri disposti lungo una linea. Se la direzione del vento e' costante durante il periodo di misura, questo significa che del vettore \mathbf{r} si considera solamente una componente, diciamo r_1 .

Un'altra possibilita' per studiare la forma della correlazione spaziale in campo (limitatamente ad una direzione unica: quella della direzione media del vento) si realizza avendo a disposizione un anemometro, in condizioni di velocita' (vettore) del vento stazionaria. In questo caso si puo' effettuare una trasformazione da tempi a distanze mediante la velocita' media del vento: ci si riconduce da dati campionati a diversi istanti di tempo, in una posizione fissa, a dati relativi a diverse distanze: $r_1 = \bar{u}_1 \tau$, avendo allineato opportunamente gli assi, cosicche' $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, 0, 0)$. In questo caso, se le condizioni sono stazionarie e se $\bar{u}_1 \gg (\overline{u_i'^2})^{1/2}$ per ogni i , si parla di 'turbolenza congelata' e si puo' immaginare che il vento medio trasporti i vortici turbolenti cosi' rapidamente che non si deformino nel tempo impiegato a passare sul punto di osservazione: la misura nel tempo, in un punto, diventa equivalente ad una misura istantanea in punti distanti. The idea of 'frozen turbulence' was discussed by Wyngaard and Coté (1971) referring to Hessestad (1965) and will be made more precise in the following Chapter.

In queste condizioni la correlazione risulta:

$$R_{ij}(r_1) \equiv R_{ij}(\tau) = \overline{u_i'(0)u_j'(\tau)} = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} u_i'(t)u_j'(t+\tau) dt, \quad \tau = r_1/\bar{u}_1 \quad (2.50)$$

dove $\mathcal{T} \gg T_{ij}$ e $\mathcal{T} + \tau_{max}$ e' la lunghezza totale dell'intervallo di misura.

Definisco la trasformata, analogamente alla Eq. (2.40)

$$E_{ij}(k_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(r_1) \exp(-ik_1 r_1) dr_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_{ij} \cos(k_1 r_1) dr_1 \quad (2.51)$$

poiche' $R_{ij}(-r) = R_{ij}(r)$ per la omogeneita' della serie (ed equivalentemente, per la stazionarieta', $R_{ij}(-\tau) = R_{ij}(\tau)$).

Per $k_1 = 0$

$$E_{ij}(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_{ij}(r_1) dr_1 = \frac{2}{\pi} \overline{u_i' u_j'} L_{ij}^{(1)} \quad (2.52)$$

In analogia con la Eq. 2.41, si ha

$$R_{ij}(r_1) = \int_0^{\infty} E_{ij}(k_1) \cos(k_1 r_1) dk_1 \quad (2.53)$$

pertanto

$$R_{ij}(0) \equiv \overline{u_i' u_j'} = \int_0^{\infty} E_{ij}(k_1) dk_1 \quad (2.54)$$

e quindi $E_{ij}(k_1) dk_1$ e' il contributo alla varianza o covarianza $\overline{u_i' u_j'}$ dall'intervallo di scale $k_1, k_1 + dk_1$.

2.3.1 Spettri della velocita' e spettro della correlazione

Con una certa circospezione (legata al fatto che u'_i puo' essere trattata come una variabile stocastica; tuttavia qui la consideriamo piuttosto come una variabile continua) posso definire la trasformata di Fourier $\hat{u}_i(\omega)$ della variabile $u'_i(t)$, che immagino campionata sull'intervallo di tempo $[0, \mathcal{T}]$:

$$\hat{u}_i(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u'_i(t) \exp(-i\omega t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\mathcal{T}} u'_i(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (2.55)$$

Evidentemente deve esistere un legame tra lo spettro della velocita' e quello della funzione di correlazione. Definisco $g(t) = u'_i(t)$ e $f(t) = u'_i(-t)$, e quindi, per la Eq. (2.31), $\hat{f}(\omega) = \hat{g}^*(\omega)$. Sostituisco f e g cosi' definite nella Eq. (2.35), usando la seconda definizione in Eq. (2.34): si ottiene la relazione

$$\hat{u}_i^*(\omega) \hat{u}_i(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u'_i(\tau - t) u'_i(\tau) d\tau \quad (2.56)$$

Uso la definizione della funzione di correlazione Eq. (2.50) in termini di ritardo temporale, e ricordo che tale funzione e' pari in condizioni stazionarie:

$$2\mathcal{T} R_{ii}(t) = \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} u'_i(\tau) u'_i(\tau - t) d\tau \quad (2.57)$$

e quindi la Eq. (2.56) diventa

$$\hat{u}_i^*(\omega) \hat{u}_i(\omega) = \frac{\mathcal{T}}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) R_{ii}(t) dt \quad (2.58)$$

che confrontata con la Eq. (2.40) fornisce infine una relazione tra gli spettri:

$$\hat{u}_i^*(\omega) \hat{u}_i(\omega) = \frac{\mathcal{T}}{2\pi} E_{ii}(\omega) \quad (2.59)$$

2.4 Some examples of spectra

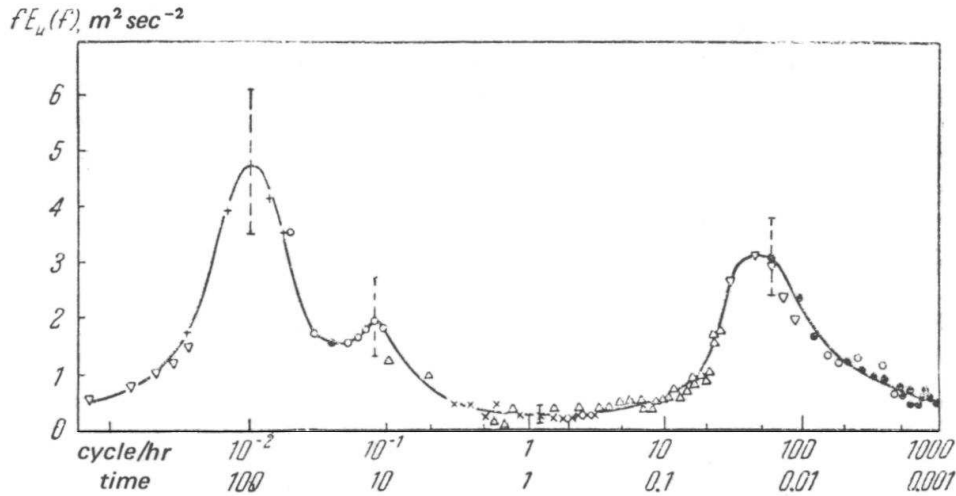


Figura 2.3: Spettro schematico della varianza della velocita' del vento nello strato limite (sintesi di molteplici osservazioni; da Van der Hoven (1957)). Il minimo attorno al periodo di 1 ora delimita la turbolenza dello strato limite (a destra, alte frequenze) dalla turbolenza 'meteorologica' (a bassa frequenza). L'assenza di tale minimo (non infrequente) induce a dover prendere in considerazione le strette interazioni tra le diverse scale del moto dell'atmosfera.

Due spettri di energia cinetica del vento misurati nello strato limite sono riportati nelle Figure 2.3 e 2.4. Gli spettri mostrano che i contributi dovuti allo strato limite e alle scale mesosinottica ed oltre sono approssimativamente separati (ed hanno energie diverse: 'gap' spettrale). La Figura 2.5 mostra spettri mediati per situazioni di vento piu' o meno intenso: si osserva che il 'gap' spettrale scompare nei casi di vento debole. La Figura 2.6 mostra uno spettro in troposfera ed uno nell'oceano: diversa e' l'energia cinetica totale e l'intervallo di frequenze (o numeri d'onda), ma la pendenza e la presenza del 'gap' sono analoghi. E' interessante considerare anche qualche spettro di scalari passivi: vedi la Fig. 2.7, da Cho et al. (1999), e gli spettri di CO₂ e vapor d'acqua da Sahlee et al. (2008): vedi la Figura 2.8.

2.5 Further remarks about averaging

2.5.1 Averaging time and correlation time

The definition of correlation time allows to an evaluation of the errors associated to a finite averaging time (see Wyngaard, 2010, p. 35). Let assume a steady process for one component of velocity u ; its mean value being indicated by U . Define $u(t) = U + u'(t)$ and the time average $\bar{u}^{(\mathcal{T})}(\theta)$ according to Eq.

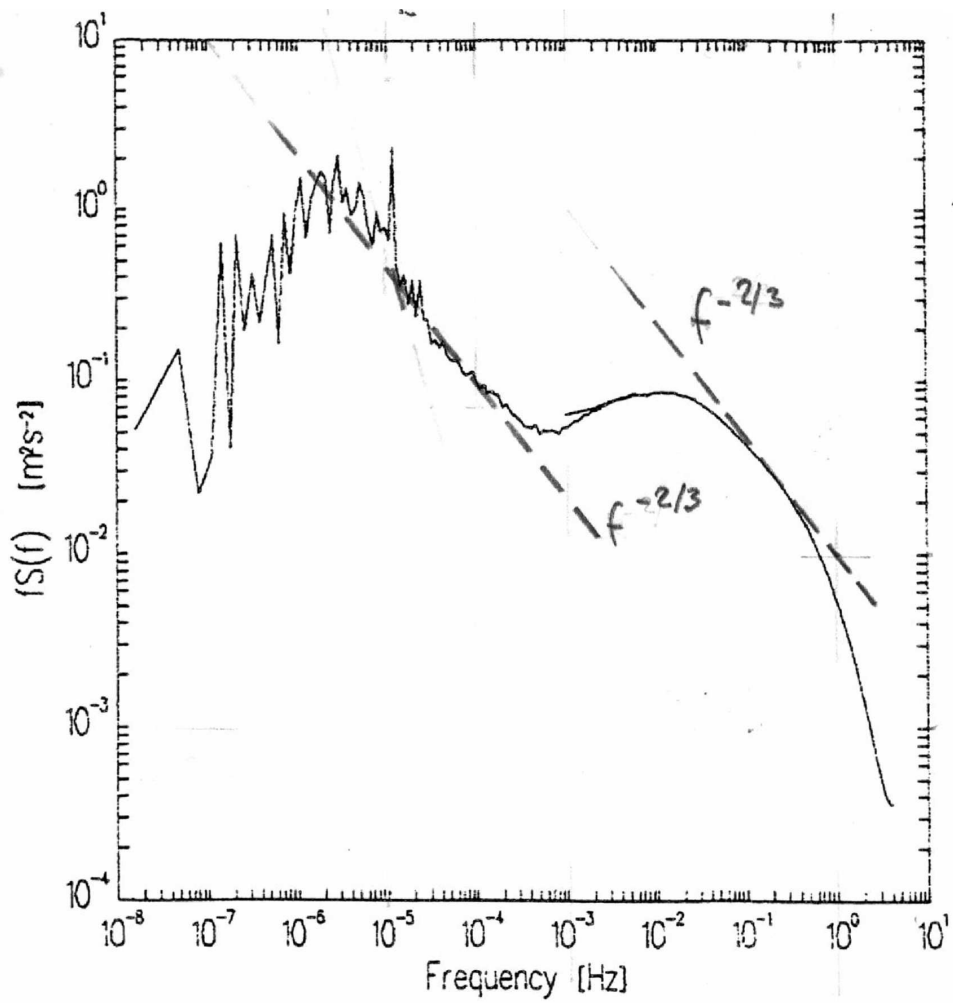


Figura 2.4: Spettro delle fluttuazioni della velocità del vento misurata ad una quota di 30 m a Lammefjord (DK), da giugno 1988 a giugno 1989 (Courtney and Troen, 1990).

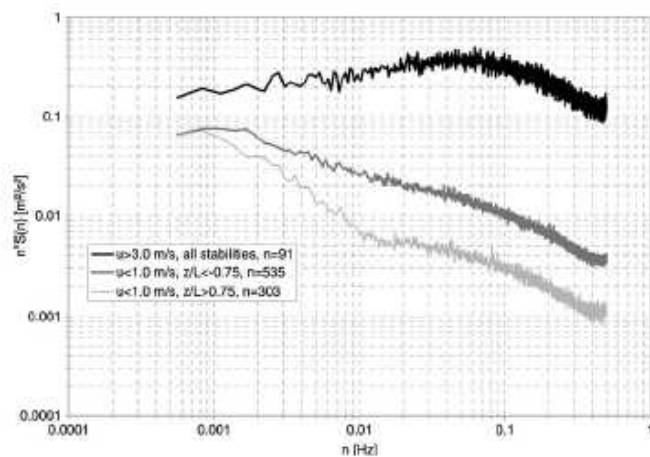


Figura 2.5: Spettro delle fluttuazioni della velocita' del vento misurate ad una quota di 10 m, in condizioni di vento $> 3\text{ m s}^{-1}$ (curva nera), $< 1\text{ m s}^{-1}$ e instabili (grigio scuro), $< 1\text{ m s}^{-1}$ e stabili (grigio chiaro), da Anfossi et al. (2005).

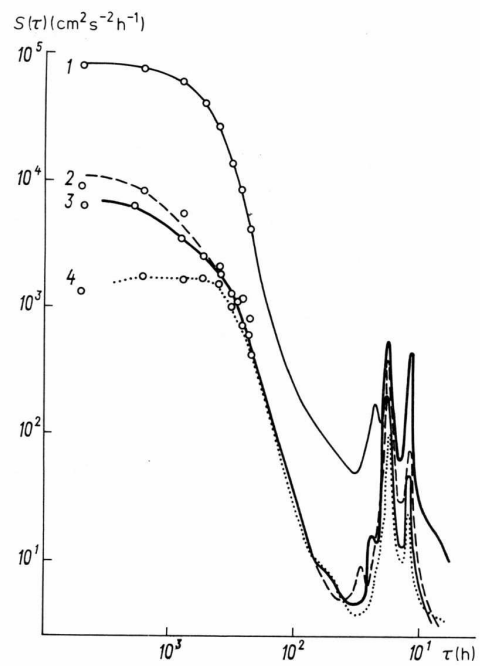
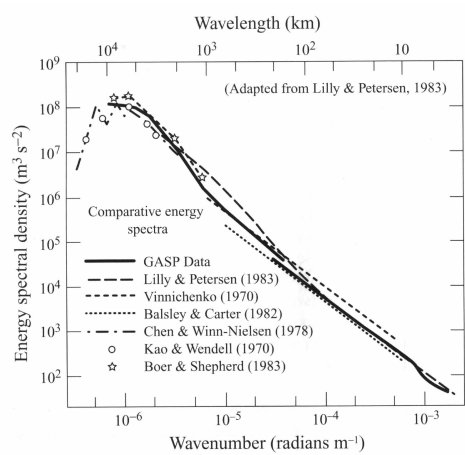


Figura 2.6: Altri spettri per confronto: spettri climatologici della componente orizzontale della velocita' del vento in troposfera (Gage, 2004) (a sinistra) e della velocita' della corrente del mare (Monin and Ozmidov, 1985) (a destra).

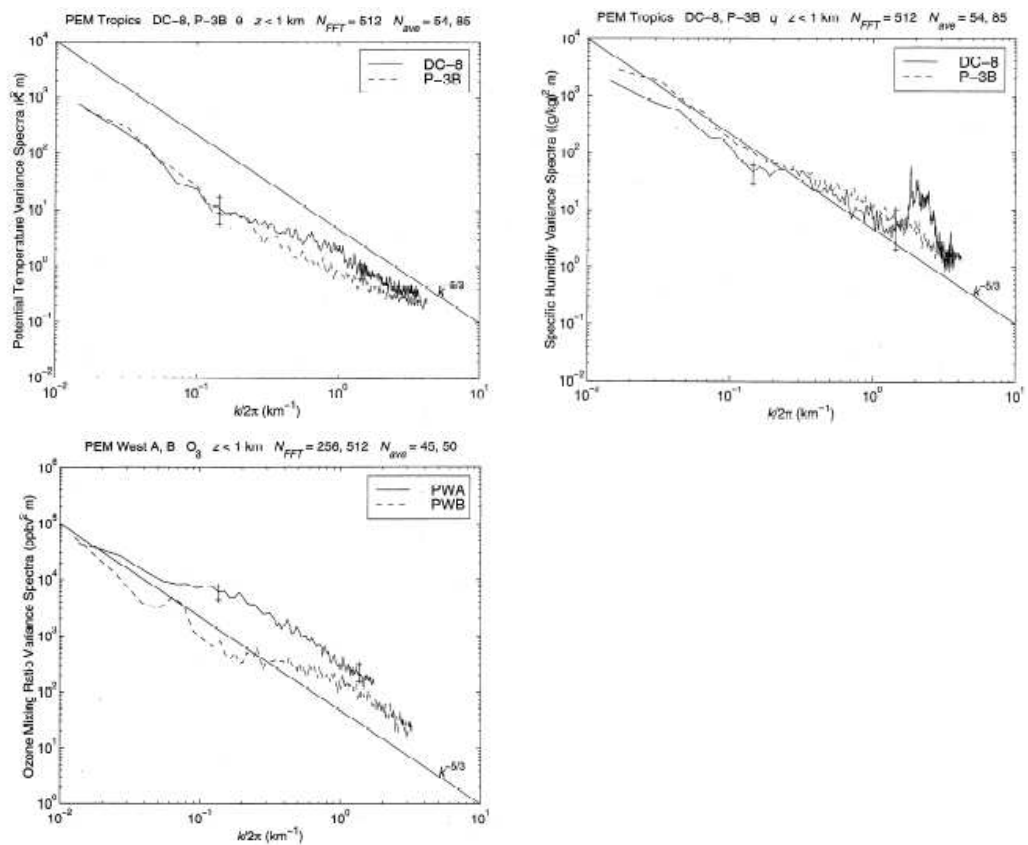


Figura 2.7: Spettri medi, ricavati da voli a quote inferiori a $1km$, per temperatura potenziale, mixing ratio per il vapor d'acqua, ozono, da Cho et al. (1999).

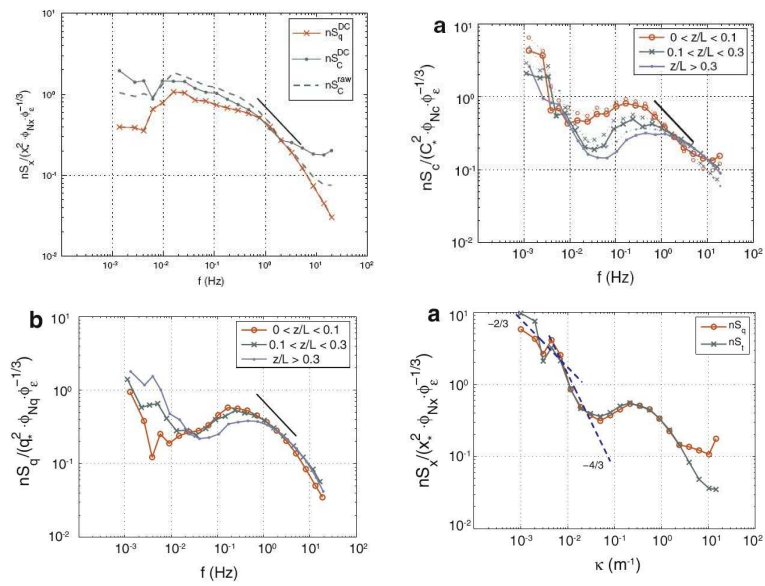


Figura 2.8: Spettri normalizzati da Sahlee et al. (2008). 1: caso instabile, spettri di umidita' (label q) e di CO_2 . La linea indica la pendenza di $-2/3$. 2: caso stabile, spettri di CO_2 per diversi valori della stabilita'. 3: caso stabile, spettri di umidita'. 4: caso stabile, spettri di temperatura e umidita' in funzione del numero d'onda. Notare la pendenza $-2/3$ a bassi numeri d'onda, caratteristica della turbolenza 2D, e la pendenza $-4/3$ a sinistra del gap, coerente con le misure in quota di Högström et al. (1999).

2.17. It results:

$$\bar{u}^{(\mathcal{T})}(\theta) - U = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{\theta-\mathcal{T}/2}^{\theta+\mathcal{T}/2} [U + u'(t)] dt - U = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{\theta-\mathcal{T}/2}^{\theta+\mathcal{T}/2} u'(t) dt \quad (2.60)$$

i.e. the difference between the time average and the true mean value is related to the average of fluctuations at time θ for an averaging time \mathcal{T} .

Let estimate the ensemble mean of σ^2 , the variance of this difference (indicated by brackets).

$$\sigma^2 \equiv \langle (\bar{u}^{(\mathcal{T})}(\theta) - U)^2 \rangle = \left\langle \frac{1}{\mathcal{T}^2} \left(\int_{\theta-\mathcal{T}/2}^{\theta+\mathcal{T}/2} u'(t) dt \right)^2 \right\rangle \quad (2.61)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mathcal{T}^2} \int_{\theta-\mathcal{T}/2}^{\theta+\mathcal{T}/2} dt_1 \int_{\theta-\mathcal{T}/2}^{\theta+\mathcal{T}/2} dt_2 \langle u'(t_1) u'(t_2) \rangle \quad (2.62)$$

According to the definition, Eq. 2.39, the term in brackets is the correlation, which is only function of the time difference in steady conditions. Thus

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mathcal{T}^2} \int_{\theta-\mathcal{T}/2}^{\theta+\mathcal{T}/2} dt_1 \int_{\theta-\mathcal{T}/2}^{\theta+\mathcal{T}/2} dt_2 R(|t_1 - t_2|) = \frac{2}{\mathcal{T}^2} \int_{\theta-\mathcal{T}/2}^{\theta+\mathcal{T}/2} R(t)(\mathcal{T} - t) dt \quad (2.63)$$

(for the transformation from double to single integral, see Eq. 15.26 and the following computations).

Thus it results, being T the correlation time (Eq. 2.47):

$$\sigma^2 \simeq 2\overline{u'^2} \text{ for } \mathcal{T} \ll T \quad (2.64)$$

$$\sigma^2 \simeq 2\overline{u'^2} \frac{T}{\mathcal{T}} \text{ for } \mathcal{T} > T \quad (2.65)$$

Thus, the variance of the difference between the time average over a finite time and the true average decreases as the ratio between the correlation time and the averaging time decreases. In actual, unsteady cases, reliable estimates can be obtained if the time characterizing the unsteadiness is much longer than the correlation time.

2.5.2 Averaging and spectra

Averaging procedure corresponds to filter the spectrum (see Pope, 2000, p. 569). Let consider a one dimensional case. Let write Eq. 2.22 for one dimension in the general form:

$$\bar{u}(x) \equiv \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} u(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} G(y) u(x-y) dy \quad (2.66)$$

where G is a top-hat filter

$$G = \frac{1}{h} \text{H} \left(\frac{h}{2} - |y| \right) \quad (2.67)$$

i.e. G is zero if $|y| > h/2$.

From the definition, Eq. 2.36, consider the correlation for the averaged velocity for a homogeneous process:

$$R^{(h)}(|x - z|) = \langle \bar{u}(x)\bar{u}(z) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(r)G(t) \langle u(x-r)u(z-t) \rangle \quad (2.68)$$

thus

$$R^{(h)}(|x - z|) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(r)G(t)R(x - z - r + t) \quad (2.69)$$

From Eq. 2.40 written for variables k and r

$$\begin{aligned} E^{(h)}(k) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R^{(h)}(a)e^{-ika} da = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(r) \int_{-\infty}^{\infty} G(t) \int_{-\infty}^{\infty} R(a - r + t)e^{-ika} da dt dr \end{aligned} \quad (2.70)$$

where $a = |x - z|$. For fixed r and t define $b = a - r + t$; Eq. 2.69 reads:

$$\begin{aligned} E^{(h)}(k) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(r)e^{-ikr} \int_{-\infty}^{\infty} G(t)e^{ikt} \int_{-\infty}^{\infty} R(b)e^{-ikb} db dt dr = \\ &= E(k) \int_{-\infty}^{\infty} G(r)e^{-ikr} dr \int_{-\infty}^{\infty} G(t)e^{ikt} dt \end{aligned} \quad (2.71)$$

Because G is an even function its Fourier transform is real, and $\hat{G} = \hat{G}^*$, and finally

$$E^{(h)}(k) = (2\pi)^2 |\hat{G}(k)|^2 E(k) \quad (2.72)$$

The Fourier transform of the filter is

$$\hat{G} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(kh/2)}{kh/2} \quad (2.73)$$

The effect of filtering is shown in the following example. The model spectrum is shown in Fig. 2.9, with the filtering function (the square of Eq. 2.73) for some choices of the averaging interval. The modified spectra are reported also in Fig. 2.9. Fig. 2.10 shows the variance, normalized over the total variance, of the filtered part as function of h : clearly, increasing the averaging interval increases the variance of the filtered part, and reduces the variance of the part explicitly described.

This example relates to the common statement of separating turbulence and mean motion: the statement is acceptably meaningful if the spectrum has a lag, and filtering is made according to the lag wavenumber. Otherwise no physically meaningful separation is possible (but can be made with success, for instance, in numerical simulations).

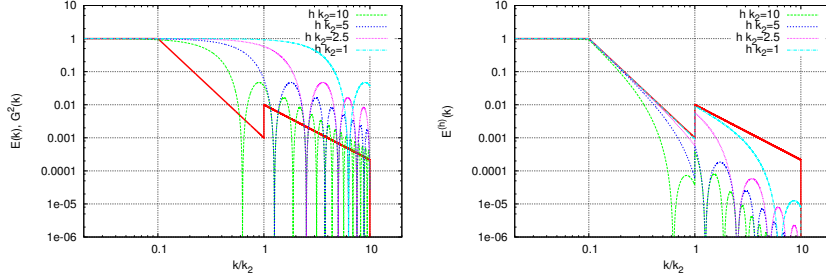


Figure 2.9: Left: the model spectrum (continuous line; note the gap at $k = k_2$) and the filter function for $h k_2 = 10, 5, 2.5, 1$. Right: the model spectrum (for reference) and the filtered spectra.

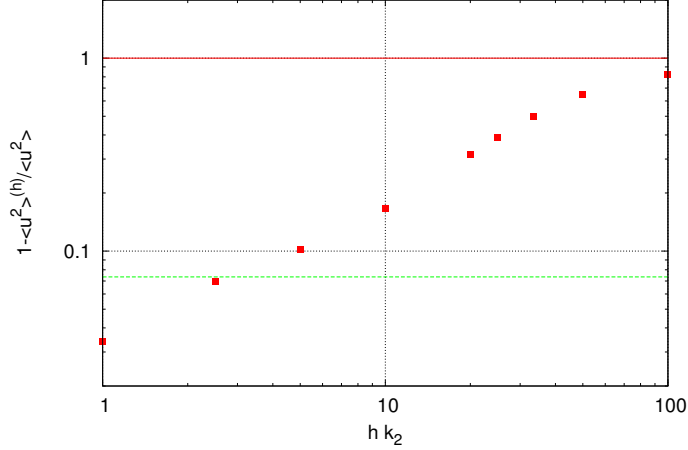


Figure 2.10: Velocity variance of the filtered part of the spectrum as function of $h k_2$, normalized over the total variance. For very large averaging interval almost all the variance lies in the filtered fraction. The green line shows the variance associated to the higher frequency part of the spectrum ($k > k_2$): the filtering procedure gives the right value at about $h k_2 = 2.5$, but this value comes from contributions from the entire spectrum.

Capitolo 3

The equations

3.1 The equations for velocity and scalars

The Navier-Stokes equations, the continuity equation and the temperature equation describe the fluid motion. For most of the aspects related to the boundary layer, we shall refer to the Boussinesq approximation (see, for instance Spiegel and Veronis, 1960), i.e. we shall neglect variations of the thermodynamic properties of the fluid, but not for the buoyancy force (Archimedes force).

From $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, with obvious meaning of symbols, the equations for momentum result:

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p_f}{\partial x_i} + \varepsilon_{ij3} f u_j + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \delta_{i3} g \quad (3.1)$$

Here

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (3.2)$$

is the material derivative (the change of the quantity under consideration following the motion); f the Coriolis parameter (equal to two times the local angular velocity of the reference system: in a site with latitude θ , being Ω the angular velocity of the Earth, $f = 2\Omega \sin \theta$); ν is the kinematic viscosity of the fluid $1.5 \cdot 10^{-5} m^2/s$ for air at the standard temperature of $20C$ and pressure of $1000hPa$. Moreover $\delta_{ij} = 1$ per $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ for $i \neq j$; $\varepsilon_{ijk} = 1$ for $ijk = 123, 231, 312$, $\varepsilon_{ijk} = -1$ for $ijk = 321, 213, 132$, $\varepsilon_{ijk} = 0$ otherwise. Note that for $i = 1$ $\varepsilon_{ij3} f u_j = f v$ and for $i = 2$ $\varepsilon_{ij3} f u_j = -f u$.

Note that keeping only advection and pressure force (i.e., for steady flow in absence of external forces and internal friction) it is possible to have an order of magnitude evaluation of the pressure (related to the dynamics): for one component $\rho_f u du/dx \simeq -dp/dx$ that can be written $\mathcal{O}(p) = \rho_f \mathcal{O}(u^2)$.

The continuity equation states the conservation of mass in a volume: the variation in time is equal to minus the divergence of the flux through the boundaries. Thus:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_f u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (3.3)$$

which is equivalent to write

$$\frac{D\rho_f}{Dt} = -\rho_f \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (3.4)$$

An incompressible fluid is defined as a fluid which density is conserved following the motion (see Batchelor, 1967, eqs. 2.2.4 and 2.2.5)

$$\frac{D\rho_f}{Dt} = 0 \quad (3.5)$$

The simplest example is a fluid with constant density. For such a fluid:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.6)$$

The budget equation for the concentration (or density, units of mass over volume) of a scalar quantity c that has no sources or sinks (i.e., it is mass-conserving) derives from the combination between the kinematic relation of conservation

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial F_i}{\partial x_i} \quad (3.7)$$

where \mathbf{F} is the flux of c and the empirical rule, called Fick law, which puts in relation the flow of c with its gradient via the molecular diffusivity κ_c specific for the scalar under consideration. Taking into account the motion of the fluid with velocity \mathbf{u}

$$F_i = u_i c - \kappa_c \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad (3.8)$$

and Eq. 3.7 reads

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_i c - \kappa_c \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) \quad (3.9)$$

Eq. 3.9 may be rewritten as:

$$\frac{Dc}{Dt} = -c \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \kappa_c \frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} \quad (3.10)$$

If the fluid is incompressible, i.e. its density is constant, Eq. 3.10 shows that the concentration of a mass-conserving scalar is conserved, if the molecular diffusion can be neglected. In a compressible fluid the concentration is not conserved because of the term $c\partial u_i/\partial x_i$, whereas the mixing ratio $q_c = c/\rho_f$

(mass of the scalar over total mass of the fluid) is conserved (neglecting molecular diffusion). This can be shown writing the material derivative for q_c and substituting with its definition:

$$\frac{Dq_c}{Dt} \equiv \frac{\partial q_c}{\partial t} + u_i \frac{\partial q_c}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{c}{\rho_f^2} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{u_i}{\rho_f} \frac{\partial c}{\partial x_i} - \frac{c u_i}{\rho_f^2} \frac{\partial \rho_f}{\partial x_i} \quad (3.11)$$

Using Eq. 3.9 divided by ρ_f and Eq. 3.3 multiplied by c/ρ_f^2 it results

$$\frac{Dq_c}{Dt} = \frac{\kappa_c}{\rho_f} \frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_i} \quad (3.12)$$

which shows that q_c is conserved in a compressible fluid, if molecular diffusion can be neglected.

3.1.1 The hydrostatic pressure

Let us consider the air as a perfect gas, so that:

$$p_f = R \rho_f T_f \quad (3.13)$$

where $R = 287 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$ is the gas constant for dry air.

At rest, $\rho_f \equiv \rho_a$, $p_f \equiv p_a$, $T_f \equiv T_a$, and Eq. 3.1 reduces to:

$$\frac{\partial p_a}{\partial z} = -\rho_a g \quad (3.14)$$

and Eq. 3.13 reads:

$$p_a = R \rho_a T_a \quad (3.15)$$

p_a is the hydrostatic pressure (the pressure of the fluid at rest). The state equation Eq. 3.15 is used to substitute density into Eq. 3.14:

$$\frac{dp_a}{dz} = -\frac{gp_a}{RT_a} \quad (3.16)$$

which allows to compute pressure as function of height if temperature is known.

Using Eq. 3.14 the sum of the pressure gradient and buoyancy terms in Eq. 3.1 can be written as:

$$-\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p_f}{\partial x_i} - \delta_{i3} g = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial (p_f - p_a)}{\partial x_i} - \delta_{i3} g \frac{\rho_f - \rho_a}{\rho_f} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \delta_{i3} g \frac{\rho}{\rho_f} \quad (3.17)$$

Let us consider small departures from the hydrostatic pressure. Thus, using the state equation Eq. 3.13:

$$\rho = \left. \frac{\partial \rho_f}{\partial T_f} \right|_a T + \left. \frac{\partial \rho_f}{\partial p_f} \right|_a p = -\frac{\rho_a}{T_a} T + \frac{p}{R T_a} \quad (3.18)$$

To evaluate the order of magnitude of the two contributions to the part of the density related to dynamics remember that when buoyancy and diffusivity

are negligible, pressure p is of order of magnitude of ρu^2 . Substituting in Eq. 3.18 it results:

$$\rho \left(1 - \frac{u^2}{R T_a} \right) = -\frac{\rho_a}{T_a} T \quad (3.19)$$

Using $T_a = 273K$ and $u = 10ms^{-1}$ as estimates of the temperature and velocity near the ground it results the the coefficient of the density differs from unity by less than 10^{-2} (this term is important as velocity is of the order of the sound velocity). Thus:

$$\frac{\rho}{\rho_a} \simeq -\frac{T}{T_a} \quad (3.20)$$

so that the momentum equation, Eq. 3.1, written according to Eq. 3.17 becomes:

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \varepsilon_{ij3} f u_j + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \delta_{i3} g \frac{\rho}{\rho_a} \quad (3.21)$$

or written in terms of temperature instead of density:

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \varepsilon_{ij3} f u_j + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \delta_{i3} g \frac{T}{T_a} \quad (3.22)$$

Eqs. 3.21 and 3.22 may be written approximately substituting ρ_{00} to ρ_f and ρ_a and T_{00} to T_a . Note also that often the basic state is considered steady so that time dependence of the basic state T_0 or ρ_0 is neglected.

3.1.2 Il vento geostrofico

La scala per la velocita' del vento alla sommita' dello strato limite si ottiene considerando l'equilibrio tra l'effetto della rotazione terrestre e dei gradienti di pressione. Trascurando l'attrito e utilizzando la densita' di riferimento, dall' Eq. (3.22) si hanno:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_{00}} \frac{\partial p}{\partial x} + f v_g &= 0 \\ -\frac{1}{\rho_{00}} \frac{\partial p}{\partial y} - f u_g &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

che definiscono le componenti del vettore vento geostrofico (orizzontale) $\mathbf{u}_g = (u_g, v_g, 0)$.

3.2 A little thermodynamics

Let consider the thermodynamics of a parcel of air: E is the internal energy per unit mass, Q the heat content and W the work made during a reversible transformation. The work is expressed by the change in specific volume $v_s = \rho^{-1}$ at constant pressure $dW = -p dv_s$. Then:

$$dE = dQ - p dv_s \quad (3.24)$$

For an adiabatic transformation $dQ = 0$. Using Eq. 3.24 the specific heat at constant pressure is defined by

$$c_p = \left. \frac{dQ}{dT} \right|_{dp=0} = \left. \frac{dE}{dT} \right|_{dp=0} + p \left. \frac{dv_s}{dT} \right|_{dp=0} \quad (3.25)$$

and the specific heat at constant volume is defined by

$$c_v = \left. \frac{dQ}{dT} \right|_{dv_s=0} = \left. \frac{dE}{dT} \right|_{dv_s=0} \quad (3.26)$$

Remember that for dry air $c_v = 718 N \text{ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ and $c_p = 1012 N \text{ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Also, $c_p = c_v + R$.

Define the entropy per unit mass S such that $dQ = T dS$ (i.e., a reversible adiabatic transformation is isentropic). For Eq. 3.24 it results for a reversible transformation:

$$T dS = dE + p dv_s \quad (3.27)$$

but $dE = c_v dT$ and

$$p dv_s = pR d(T/p) = R dT - RT/p dp = R dT - \rho^{-1} dp \quad (3.28)$$

so that Eq. 3.27 reads

$$T dS = c_v dT + R dT - \rho^{-1} dp = c_p dT - \rho^{-1} dp \quad (3.29)$$

The previous result can be applied to an air parcel moving adiabatically (i.e. with $dS = 0$) along a trajectory: an equation for temperature results

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = 0 \quad (3.30)$$

3.2.1 The adiabatic gradient of temperature

Assuming an adiabatic vertical motion, it is possible to compute the vertical gradient of temperature. This gradient is the equilibrium gradient if no exchange of heat occurs. Then, from Eq. 3.30 using for the material derivative the expression $w d/dz$ where w is a constant vertical velocity, it results:

$$\frac{dT_a}{dz} = \frac{1}{c_p \rho_a} \frac{dp_a}{dz} \quad (3.31)$$

and using Eq. 3.14 it results

$$\frac{dT_a}{dz} = -\frac{g}{c_p} \quad (3.32)$$

Using typical values for dry air:

$$\frac{dT_a}{dz} \approx -10 K/km \quad (3.33)$$

In presenza di vapor d'acqua possono avvenire fenomeni di condensazione, per cui il processo non e' adiabatico. La variazione di calore e' pari a $dQ = -\Delta H_v d\omega$, con ΔH_v calore latente di vaporizzazione e $d\omega$ massa di vapor acqueo per unita' di massa di aria secca. Percio' l'Eq. 3.29 diventa:

$$c_p \frac{dT_a}{dz} - \rho_a^{-1} \frac{dp_a}{dz} = -\Delta H_v \frac{d\omega}{dz} \quad (3.34)$$

$$\frac{dT_a}{dz} = -\frac{g}{c_p} - \frac{\Delta H_v}{c_p} \frac{d\omega}{dz} \quad (3.35)$$

Questa equazione consente di quantificare il gradiente di temperatura in presenza di condensazione o evaporazione: per una massa ascendente, in cui si ha condensazione di vapore, si ha $d\omega/dz < 0$ e

$$\left. \frac{dT_a}{dz} \right|_{\text{condensazione}} > \left. \frac{dT_a}{dz} \right|_{\text{adiabatico}} \quad (3.36)$$

3.2.2 Potential temperature

The potential temperature ϑ is the temperature that a fluid particle with temperature T at a level z with pressure p takes if it moves adiabatically to a level z_{ref} with pressure p_{ref} . In other words, the potential temperature ϑ is constant if the entropy per unit mass S is constant.

Referring to Eq. 3.29 the potential temperature ϑ is defined as the quantity that satisfies the following equation:

$$\frac{dS}{dz} \equiv \frac{c_p}{T_a} \frac{dT_a}{dz} - \frac{1}{\rho_a T_a} \frac{dp_a}{dz} = \frac{c_p}{\vartheta_a} \frac{d\vartheta_a}{dz} \quad (3.37)$$

The equation reads, using the equation of state

$$\frac{c_p}{\vartheta_a} \frac{d\vartheta_a}{dz} = \frac{c_p}{T_a} \frac{dT_a}{dz} - \frac{R}{p_a} \frac{dp_a}{dz} \quad (3.38)$$

or

$$\frac{1}{\vartheta_a} \frac{d\vartheta_a}{dz} = \frac{1}{T_a} \frac{dT_a}{dz} - \frac{R}{c_p p_a} \frac{dp_a}{dz} \quad (3.39)$$

Integrating from z_{ref} to z

$$\log \frac{\vartheta(z)}{\vartheta(z_{ref})} = \log \frac{T(z)}{T(z_{ref})} + \log \left(\frac{p(z)}{p(z_{ref})} \right)^{-R/c_p} \quad (3.40)$$

or, noting that by definition $T(z_{ref}) = \vartheta(z_{ref})$,

$$\vartheta = T \left(\frac{p}{p_{ref}} \right)^{-R/c_p} \quad (3.41)$$

A common choice is $p_{ref} = 1013hPa$, representing the surface value. Typically for atmospheric conditions, $R/c_p \approx 0.286$.

It can be shown that for dry air the adiabatic gradient of potential temperature is zero. In fact, from Eq. 3.41:

$$\frac{d\vartheta_a}{dz} = \frac{dT_a}{dz} \left(\frac{p_a}{p_{ref}} \right)^{-R/c_p} - T_a \frac{R}{c_p} \left(\frac{p_a}{p_{ref}} \right)^{-R/c_p} \frac{1}{p_a} \frac{dp_a}{dz} \quad (3.42)$$

and using Eqs. 3.16 and 3.31 it results that $d\vartheta_a/dz = 0$.

As for the other scalars, the potential temperature is splitted in: $\vartheta_f = \vartheta_a + \vartheta = \vartheta_{00} + \vartheta_0(z, t) + \vartheta(x, y, z, t)$.

3.2.3 Virtual temperature

In order to account for the effect of the presence of water vapour on the air density, the virtual temperature is defined as follows.

For dry air (of molecular mass 29) $p_d = \rho_d R T_f$ and for the water vapour $p_v = \rho_v R_v T_f$. Note that $R_v = 641.5 J kg^{-1} K^{-1}$ and the water vapour molecular mass is 18. For the mixture, the total pressure $p_a = p_d + p_v$; the specific humidity is defined as $q = \rho_v / \rho_a$. So $\rho_a = \rho_d + \rho_v$ and $\rho_d = (1 - q)\rho_a$.

By taking the ratio of the perfect gas equations for vapour and dry air it results:

$$\frac{p_v}{p_a} = \frac{\rho_v}{R/R_v \rho_d + \rho_v} = \frac{\rho_v}{R/R_v \rho_a + (1 - R/R_v) \rho_v} \quad (3.43)$$

and dividing by ρ_a

$$\frac{p_v}{p_a} = \frac{q}{R/R_v + (1 - R/R_v)q} \quad (3.44)$$

and remember $R/R_v \simeq 0.622$.

Again from the equation of state:

$$\rho_a \equiv \frac{p_d}{RT_a} + \frac{p_v}{R_v T_a} = \frac{p_a}{RT_a(1 - q + q/(R/R_v))} \quad (3.45)$$

This equation suggests the definition of the virtual temperature $T_v = T_a(1 - q + q/(R/R_v)) \simeq T_a(1 + 0.608 q)$. It is straightforward the definition of the potential virtual temperature ϑ_v .

If there is liquid water, being q_{sat} the mixing ratio for the saturation and q_{liq} the mixing ratio of liquid water in the atmosphere, the virtual temperature reads:

$$T_v = T_a(1 + 0.608 q_{sat} - q_{liq}) \quad (3.46)$$

3.3 The equation for temperature

When the motion is non isentropic (non adiabatic), additional terms must be added to Eq. 3.30 to include additional effects. The radiative exchange is quantified via the radiative flux density \mathbf{F}^{rad} of energy exchanged with the surroundings. The heat exchange due to molecular conduction is proportional

to the temperature gradient, and is given by $-K_T \partial T_f / \partial x_i$. (The thermal conductivity is $K_T = \rho_{00} \kappa_T c_p = 0.025 W m^{-1} K^{-1}$; the thermal diffusivity is $\kappa_T = 2.1 \cdot 10^{-5} m^2 s^{-1}$.) Heating due to change of phase (latent heat release), to chemical reactions, to viscous dissipation, is represented by the rate of heating for unit volume Q_H .

The Eq. 3.30 is thus modified to take into account the additional effects and reads:

$$\rho_f c_p \frac{DT_f}{Dt} - \frac{Dp_f}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_T \frac{\partial T_f}{\partial x_i} - F_i^{rad} \right) + Q_H \quad (3.47)$$

In a constant density flow the term $p dv_s = 0$ so that along an adiabatic trajectory Eq. 3.27 gives $dE = 0$. In terms of material derivative the temperature equation then reads:

$$\rho_f c_v \frac{DT_f}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_T \frac{\partial T_f}{\partial x_i} - F_i^{rad} \right) + Q_H \quad (3.48)$$

(Note that the same result can be obtained from Eq. 3.47 noting that

$$\frac{Dp}{Dt} = \rho R \frac{DT}{Dt} \quad (3.49)$$

for a constant density flow, so that

$$\rho_f c_p \frac{DT_f}{Dt} - \frac{Dp_f}{Dt} = \rho_f c_v \frac{DT_f}{Dt} \quad (3.50)$$

and the same expression results. incompressible flow.)

Using Eq. 3.37 for a generic motion (thus substituting d/dz with D/Dt) the material derivative of temperature can be expressed as

$$\rho_f c_p \frac{DT_f}{Dt} = \rho_f c_p \frac{T_f}{\vartheta_f} \frac{D\vartheta_f}{Dt} + \frac{Dp_f}{Dt} \quad (3.51)$$

giving an equation for the potential temperature:

$$\rho_f c_p T_f \vartheta_f^{-1} \frac{D\vartheta_f}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_T \frac{\partial T_f}{\partial x_i} - F_i^{rad} \right) + Q_H \quad (3.52)$$

consistent with the fact that in isentropic processes potential temperature is conserved:

$$\frac{D\vartheta_f}{Dt} = 0 \quad (3.53)$$

3.4 Equazioni del moto non dimensionali e analisi di scala

Si vogliono ora adimensionalizzare le Equazioni 3.21 per la quantita' di moto utilizzando scale (per ora arbitrarie) di velocita' e lunghezza U ed L . Nel termine di galleggiamento la perturbazione di densita' ha scala $L d\rho_0/dz$; la

variazione di pressione ha scala $\rho_f U^2 \simeq \rho_{00} U^2$ se consideriamo solo il contributo dinamico (trascurando il termine idrostatico). La scelta di una unica velocita' di scala e di una unica lunghezza di scala implica una sorta di isotropia nel moto. In condizioni di anisotropia del problema questa scelta deve essere modificata.

Nelle equazioni che seguono le variabili (posizione, tempo) e le funzioni (velocita', pressione, densita', temperatura) sono quantita' nondimensionali, pur essendo rappresentate dagli stessi simboli. Qualora si dovesse avere ambiguita', verranno indicate come rapporto tra la quantita' dimensionale e la rispettiva scala.

Si ottiene

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \varepsilon_{ij3} \mathcal{R}_o^{-1} u_j + \mathcal{R}_e^{-1} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \delta_{i3} \mathcal{F}_l^{-2} \rho \quad (3.54)$$

dove compaiono (e quindi caratterizzano il moto) il numero di Reynolds $\mathcal{R}_e = UL/\nu$, il numero di Froude $\mathcal{F}_l = U/NL$ e il numero di Rossby $\mathcal{R}_o = U/fL$.

Si nota che

$$N = \left(-\frac{g}{\rho_{00}} \frac{d\rho_0}{dz} \right)^{1/2} \quad (3.55)$$

e' una frequenza, detta frequenza di Brunt-Vaisala, che rappresenta la frequenza massima di un'onda interna nel fluido. Un valore di riferimento per N puo' essere usato per caratterizzare lo stato dell'atmosfera.

L'equazione per la temperatura T e' :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\kappa_T}{\nu} \mathcal{R}_e^{-1} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.56)$$

Note that the Prandtl number is defined as $\mathcal{P}_r = \nu/\kappa_T$.

L'equazione di continuita', Eq. 3.6, mantiene la stessa forma in formulazione nondimensionale.

Si possono stimare le grandezze dei vari numeri adimensionali considerando valori di scala rappresentativi per lo strato limite atmosferico. Posto $U = 10ms^{-1}$, $L = 1000m$, e $N = .01s^{-1}$, si ha $\mathcal{R}_e \sim 10^9$, $\mathcal{R}_o \sim 100$ and $\mathcal{F}_l \sim 1$. Pertanto il termine di attrito viscoso ed il termine di Coriolis risultano piccoli rispetto all'avvezione ed al gradiente di pressione. Il termine legato agli effetti di densita' puo' essere trascurato solo se il gradiente verticale di ρ_0 , ovvero di ϑ_a , e' praticamente nullo (atmosfera neutra).

3.5 Le equazioni per i momenti primi

Si e' gia' osservato come le variabili che descrivono lo stato del fluido possano essere considerate come variabili stocastiche. Le equazioni di Navier-Stokes, l'equazione di continuita' e le equazioni per gli scalari vengono utilizzate per ricavare equazioni di evoluzione per i momenti delle variabili.

Here the equation for incompressible flows will be considered.

Sostituendo nelle Eq. (3.22) le variabili scritte come media piu' fluttuazione e mediando si ottengono le equazioni per le componenti della velocita' media (si ricorda che $\bar{p} = \bar{p}_f - p_a$):

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_{00}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \delta_{i3} \frac{g}{\rho_{00}} \bar{\rho} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad (3.57)$$

dove la derivata sostanziale e' ora riferita alla velocita' media \bar{u}_j :

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (3.58)$$

L'equazione di continuita' e':

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.59)$$

Per la temperatura e per la temperatura potenziale:

$$\frac{D\bar{\theta}}{Dt} + \bar{u}_3 \frac{d\vartheta_0}{dx_3} = \kappa_T \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_j \theta'}}{\partial x_j} \quad (3.60)$$

where it is assumed that fluctuations of potential temperature can be substituted into the Laplacian in place of fluctuations of temperature.

L'equazione di conservazione di una quantita' scalare ha la forma:

$$\frac{D\bar{c}}{Dt} = \kappa_c \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_j c'}}{\partial x_j} \quad (3.61)$$

Nell' equazione per la quantita' di moto, per numeri di Reynolds alti, si trascura in generale il termine di diffusione molecolare. Si nota che per poter trascurare i termini equivalenti nell'equazione del calore e dello scalare, occorre che il numero di Prandtl $\mathcal{P}_r = \nu/\kappa_T$ e il numero di Schmidt $\mathcal{S}_c = \nu/\kappa_c$ siano di ordine 1 o comunque finiti.

Si nota che le equazioni non sono chiuse, poiche' contengono termini del secondo ordine. Per risolverle sono necessarie altre equazioni per tali termini, che contengono termini di ordine superiore. Dunque e' necessario adottare opportune semplificazioni (quando possibile), per esempio sulla base di analisi di scala specifiche per il problema, o espressioni approssimate in cui i momenti di ordine piu' alto siano espressi come funzioni dei momenti descritti esplicitamente (problema della chiusura).

3.6 L'equazione per la pressione

Per ricavare l'equazione per la pressione si calcola la divergenza dell'eq. di Navier-Stokes (ossia si deriva la Eq. 3.1 rispetto a x_i e sommo su i). Si ottiene, tenendo conto dell'equazione di continuita':

$$\frac{\partial(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_i} \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} + \frac{g}{\rho_{00}} \frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial x_i} \delta_{i3} = - \frac{\partial^2(\bar{p} + p')}{\partial x_i \partial x_i} \quad (3.62)$$

(Townsend, 1976, pag. 43)

Mediando, l'equazione per la pressione media risulta:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{g}{\rho_{00}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} \delta_{i3} + \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_i \partial x_j} = - \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x_i \partial x_i} \quad (3.63)$$

3.7 Le equazioni per le fluttuazioni

Se dalle equazioni di Navier Stokes (indicando esplicitamente la decomposizione delle variabili in media piu' fluttuazione) si sottrae l'equazione per le componenti medie, si ottengono le equazioni per le fluttuazioni della velocita':

$$\frac{D u'_i}{Dt} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho_{00}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} - \delta_{i3} \frac{g}{\rho_{00}} \rho' - \frac{\partial(u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} \quad (3.64)$$

L'equazione di continuita' e':

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.65)$$

Sottraendo dalla Eq. 3.62 la Eq. 3.63 si ottiene l'equazione per le fluttuazioni di pressione:

$$- \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 (u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j})}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{g}{\rho_{00}} \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} \delta_{i3} \quad (3.66)$$

Se si trascurano le interazioni della turbolenza con se stessa (i termini $u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j}$) le equazioni diventano lineari nelle fluttuazioni: si ottengono le equazioni che descrivono la cosiddetta 'distorsione rapida': Townsend (1976), Cambon and Scott (1999).

Analogamente si possono scrivere equazioni per le fluttuazioni di temperatura (o densita') ed ogni tracciante passivo. Per la temperatura (potenziale, ma va bene anche quella assoluta):

$$\frac{D \vartheta'}{Dt} + u'_j \frac{\partial \bar{\vartheta}_f}{\partial x_j} = \kappa_T \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial(u'_j \vartheta' - \overline{u'_j \vartheta'})}{\partial x_j} \quad (3.67)$$

dove si nota che compare il gradiente del campo medio di temperatura, ovvero il gradiente della quantita' $\vartheta_0 + \bar{\vartheta}$.

Formalmente analoga e' l'equazione per le fluttuazioni di densita'. Ancora, e' analoga la equazione per le fluttuazioni di concentrazione, con coefficiente κ_c .

3.8 Le equazioni per i momenti di secondo ordine

Moltiplicando l'equazione per le fluttuazioni di u'_i per u'_k e sommando l'equazione per le fluttuazioni di u'_k moltiplicata per u'_i e mediando, si ottiene l'equazione per i momenti di secondo ordine delle componenti della velocità (le tensioni di Reynolds):

$$\begin{aligned}
 \frac{D\overline{u'_i u'_k}}{Dt} &= \left(-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} - \overline{u'_k u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_j} \\
 &- \frac{g}{\rho_{00}} (\delta_{k3} \overline{u'_i \rho'} + \delta_{i3} \overline{u'_k \rho'}) + f(\varepsilon_{kj3} \overline{u'_i u'_j} + \varepsilon_{ij3} \overline{u'_k u'_j}) \\
 &- \frac{1}{\rho_{00}} \left(\overline{u'_k \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_k}} \right) \\
 &+ \nu \left(\overline{u'_k \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j}} + \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_k}{\partial x_j \partial x_j}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

Il significato dei diversi termini è':

- 1: produzione di quantità di moto da parte dello 'shear' medio
- 2: trasporto di quantità di moto da parte della turbolenza
- 3: produzione/rimozione dovuta al galleggiamento
- 4: effetto della rotazione (Coriolis)
- 5: trasporto dovuto all'accoppiamento tra fluttuazioni di pressione e di velocità. Si noti che può essere riscritto come

$$-\frac{1}{\rho_{00}} \left(\overline{\frac{\partial p' u'_k}{\partial x_i}} + \overline{\frac{\partial p' u'_i}{\partial x_k}} \right) - \frac{p'}{\rho_{00}} \left(\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_i}} \right) \tag{3.69}$$

- 6: dissipazione molecolare

Si osservi innanzitutto che i termini 2 e 5 sono momenti del terzo ordine.

Il termine di dissipazione molecolare (termine 6) è' proporzionale al numero di Reynolds. Può essere scritto come segue:

$$\nu \left(\overline{u'_k \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j}} + \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_k}{\partial x_j \partial x_j}} \right) = \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_j \partial x_j} - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} \tag{3.70}$$

Per effettuare il calcolo, si noti che:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_j \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u'_i \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} + \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right) = \\
 &= \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} + \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_k}{\partial x_j \partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} + \overline{u'_k \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j}}
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Il primo termine della Eq. 3.70 rappresenta la diffusione molecolare del momento di secondo ordine $\overline{u'_i u'_k}$, mentre il secondo termine rappresenta la correlazione delle derivate prime delle fluttuazioni di velocità.

In generale ad alti numeri di Reynolds il primo termine è trascurabile rispetto al secondo.

Assumendo che la turbolenza alle piccole scale sia omogenea ed isotropa i termini non diagonali sono nulli. Quindi, se la dissipazione è dominata da fenomeni di piccola scala, si ha (approssimativamente):

$$2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \equiv \varepsilon_{ik} \simeq \frac{2}{3} \delta_{ik} \varepsilon \quad (3.72)$$

Si noti che:

$$\varepsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} \quad (3.73)$$

è un termine (positivo) di distruzione molecolare per i termini diagonali del tensore $\overline{u'_i u'_k}$. I termini non diagonali del tensore non sono soggetti a fenomeni dissipativi, perché alle piccole scale le fluttuazioni di componenti della velocità non parallele non sono correlate.

3.8.1 Nota sugli effetti dell'isotropia

Si considera una rotazione del sistema di riferimento cartesiano di $-\pi/2$ attorno all'asse x_3 (vedi Fig. 3.1). Sia \mathbf{v} il vettore velocità nel sistema ruotato, mentre \mathbf{u} sarà quello originale. Si ha:

$$u_1 = -v_2 \quad (3.74)$$

$$u_2 = v_1 \quad (3.75)$$

$$u_3 = v_3 \quad (3.76)$$

Questo vale per ogni realizzazione. In media si ha, per esempio:

$$\overline{u_1^2} = \overline{v_2^2} \quad (3.77)$$

e

$$\overline{u_1 u_2} = -\overline{v_1 v_2} \quad (3.78)$$

Se il sistema è isotropo, $\overline{u_i u_j} = \overline{v_i v_j}$ e quindi risulta

$$\overline{u_i u_j} = \delta_{ij} \overline{u^2} \quad (3.79)$$

In modo analogo, si considera una rotazione di π attorno all'asse x_3 . In questo caso

$$u_1 = -v_1 \quad (3.80)$$

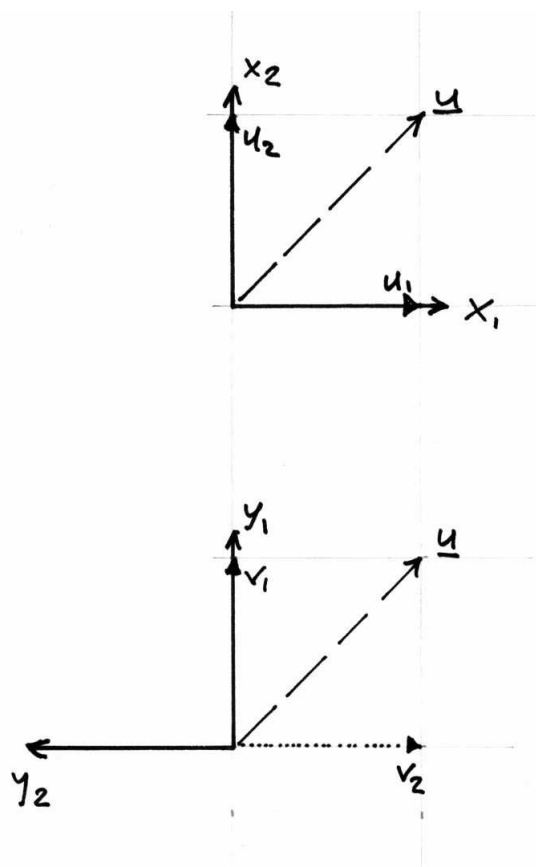


Figura 3.1: Schema per la rotazione degli assi.

$$u_2 = -v_2 \quad (3.81)$$

$$u_3 = v_3 \quad (3.82)$$

Si ha per esempio:

$$\overline{u_i^3} = -\overline{v_i^3} \quad i = 1, 2 \quad (3.83)$$

$$\overline{u_1 u_2^2} = -\overline{v_1 v_2^2} \quad (3.84)$$

eccetera.

In condizioni di isotropia $\overline{u_i^3} = \overline{v_i^3}$ e quindi $\overline{u_i^3} = 0$.

3.9 L'equazione per l'energia cinetica turbolenta

Imponendo $i = k$ nell'equazione 3.68 si puo' ottenere semplicemente un'equazione per l'energia cinetica turbolenta $\frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i}$:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} q^2 \right) = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{p' u'_j}}{\rho_{00}} + \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} \right) - \frac{g}{\rho_{00}} \overline{\rho' u'_3} - \varepsilon \quad (3.85)$$

dove il termine di Coriolis ed il termine di dissipazione molecolare $\nu/2\partial^2 q^2/\partial x_j^2$ sono stati trascurati. Si noti inoltre che il termine di correlazione tra fluttuazioni di pressione e derivate delle velocita' si annulla grazie all'equazione di continuita'.

3.10 L'equazione per la varianza di uno scalare

L'equazione per la varianza della temperatura (assunta come scalare passivo), ed in generale per la varianza di ogni scalare passivo, si ottiene dall'equazione per le fluttuazioni moltiplicando tutti i termini per ϑ' (o c') e mediando:

$$\frac{1}{2} \frac{D \overline{\vartheta'^2}}{Dt} = -\overline{u'_i \vartheta'} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'_i \vartheta'^2}}{\partial x_i} + \overline{\kappa_T \vartheta' \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x_i \partial x_i}} \quad (3.86)$$

dove l'ultimo termine puo' essere scritto analogamente alla eq. 3.70 come somma di un termine di diffusione viscosa della varianza delle fluttuazioni (che ad alto numero di Reynolds, se i coefficienti di viscosita' cinematica e di diffusivita' molecolare sono dello stesso ordine, puo' essere trascurato) e di un termine dissipativo, $-\varepsilon_\vartheta$:

$$\varepsilon_\vartheta = \overline{\kappa_T \left(\frac{\partial \vartheta'}{\partial x_j} \right)^2} \quad (3.87)$$

Note that the term $-\overline{u'_3 \vartheta' \partial \bar{\vartheta}}/\partial x_3 \geq 0$ always represents production of temperature variance (the vertical production term).

Per qualsiasi tracciante passivo, l'equazione per la varianza delle fluttuazioni di concentrazione e' identica alla Eq. 3.86, avendo sostituito la fluttuazione di temperatura con c' e il coefficiente di diffusione molecolare con κ_c . Il termine dissipativo puo' a sua volta essere scritto analogamente alla eq. 3.87.

3.11 L'equazione per i flussi (cinematici) di calore

L'equazione per il flusso di calore $\overline{\vartheta' u'_i}$ e' la seguente:

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u'_i \vartheta'}}{Dt} = & \left(-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial x_j} - \overline{u'_j \vartheta'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j \vartheta'}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho_{00}} \overline{\vartheta'} \frac{\partial \overline{p'}}{\partial x_i} + \delta_{i3} \frac{g}{\vartheta_{00}} \overline{\vartheta'^2} \\ & + \left(\overline{\nu \vartheta' \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j}} + \overline{\kappa_T u'_i \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x_j \partial x_j}} \right) \end{aligned} \quad (3.88)$$

In particolare l'equazione per il flusso verticale risulta:

$$\frac{D\overline{u'_3 \vartheta'}}{Dt} = -\overline{u'_j u'_3} \frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial x_j} + \frac{g}{\vartheta_{00}} \overline{\vartheta'^2} - \frac{\partial \overline{u'_3 u'_j \vartheta'}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho_{00}} \overline{\vartheta'} \frac{\partial \overline{p'}}{\partial x_3} \quad (3.89)$$

Si nota che la parte di destra dell'equazione contiene termini di accoppiamento tra flussi e quantita' medie, un termine legato alla varianza delle fluttuazioni (sempre positivo), e due termini di divergenza di momenti di ordine tre.

I termini di accoppiamento possono essere riscritti:

$$-\overline{u'_j u'_3} \frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial x_j} = -\mathbf{t}_V \cdot \nabla_H \overline{\vartheta} - \overline{u_3'^2} \frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial x_3} \quad (3.90)$$

where $\mathbf{t}_V = (\overline{u_3' u_1'}, \overline{u_3' u_2'})$ is a vector representing the vertical momentum flux. Il primo termine dipende dalla presenza di gradienti orizzontali di temperatura media; il secondo e' positivo in condizioni instabili (il gradiente di temperatura potenziale cala con la quota) e negativo nel caso opposto.

3.12 L'equazione per i flussi di traccianti passivi

Analogamente all'equazione 3.68, si puo' ottenere l'equazione per il flusso $\overline{c' u'_i}$ di un tracciante di concentrazione $\overline{c} + c'$:

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u'_i c'}}{Dt} = & \left(-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{c}}{\partial x_j} - \overline{u'_j c'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j c'}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho_{00}} \overline{c'} \frac{\partial \overline{p'}}{\partial x_i} - \frac{g}{\rho_{00}} \overline{\rho' c'} \\ & + \left(\overline{\nu c' \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j}} + \overline{k_c u'_i \frac{\partial^2 c'}{\partial x_j \partial x_j}} \right) \end{aligned} \quad (3.91)$$

Nota che

$$-\frac{g}{\rho_{00}} \overline{\rho' c'} = \frac{g}{\vartheta_{00}} \overline{\vartheta' c'} \quad (3.92)$$

E' importante notare come il termine dissipativo possa essere scritto, in maniera del tutto simile all' equazione 3.70, come la somma tra un termine

proporzionale al numero di Reynolds (moltiplicato per il rapporto tra la diffusività molecolare e la viscosità cinematica) e un altro proporzionale alla quantità

$$\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial c'}{\partial x_j}} \quad (3.93)$$

Come già notato, questo termine di dissipazione è legato alle piccole scale, che si possono assumere isotrope, e quindi per motivi di simmetria solo i termini diagonali sono diversi da zero. In questo caso i termini diagonali non esistono, perciò si può concludere che la dissipazione non influisce sui flussi turbolenti di quantità scalari.

3.13 L'interpretazione del termine di flusso turbolento e il modello della lunghezza di mescolamento

Per rendere l'idea del significato dei termini di correlazione presenti nelle equazioni precedenti (come ad es. la 3.57), si può considerare il caso in cui la velocità sia data da $\mathbf{u} = (\bar{u}(z), 0, w')$, dove z è la distanza da una parete solida, dove la velocità si annulla. La parete è chiaramente un pozzo di quantità di moto media, che viene mantenuta per esempio dall'esistenza di un gradiente di pressione.

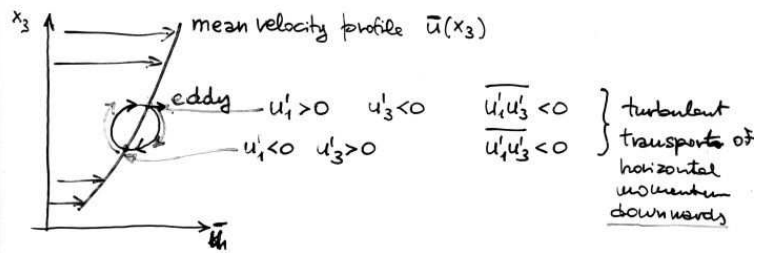
Si immagini una particella di fluido spostata in direzione z per effetto di una fluttuazione della componente verticale, senza modifica della sua componente orizzontale (per una illustrazione schematica, vedi Fig. 3.2). Una fluttuazione positiva (negativa) della componente verticale sposta le particelle del fluido con velocità $\bar{u}(z)$ verso l'alto (basso), dove la velocità orizzontale è inferiore (superiore), e quindi comporta l'instaurarsi di fluttuazioni della componente orizzontale. Perciò ad un valore negativo di w' è associato un valore positivo di u' se la componente orizzontale media cresce con z . Analogamente se w' è positivo u' è negativo. Il termine di correlazione $\overline{u'w'}$ risulta negativo, e rappresenta il trasporto turbolento di quantità di moto nel verso negativo di z , cioè dall'alto verso il basso.

Analogamente si può affermare che i termini di correlazione $\overline{u'_i \zeta'}$ rappresentano il flusso dello scalare $\bar{\zeta}$ in direzione x_i . In particolare se si tratta di temperatura, il termine $\overline{w' \vartheta'}$ è proporzionale al flusso verticale di calore. In accordo con l'interpretazione data sopra, se il gradiente di temperatura potenziale media è positivo, il flusso è negativo.

In analogia con la legge di Fick e con le proprietà molecolari di trasporto, si usa definire la viscosità turbolenta ('eddy viscosity') K_ζ come rapporto tra il flusso di una quantità ζ e l'opposto del gradiente della quantità media stessa. Limitandosi ad una sola dimensione, poniamo z :

$$\overline{w' \zeta'} = -K_\zeta \frac{d\bar{\zeta}}{dz} \quad (3.94)$$

interpretation of the term $\overline{u'_1 u'_3}$



interpretation of the term $\overline{\theta' u'_3}$

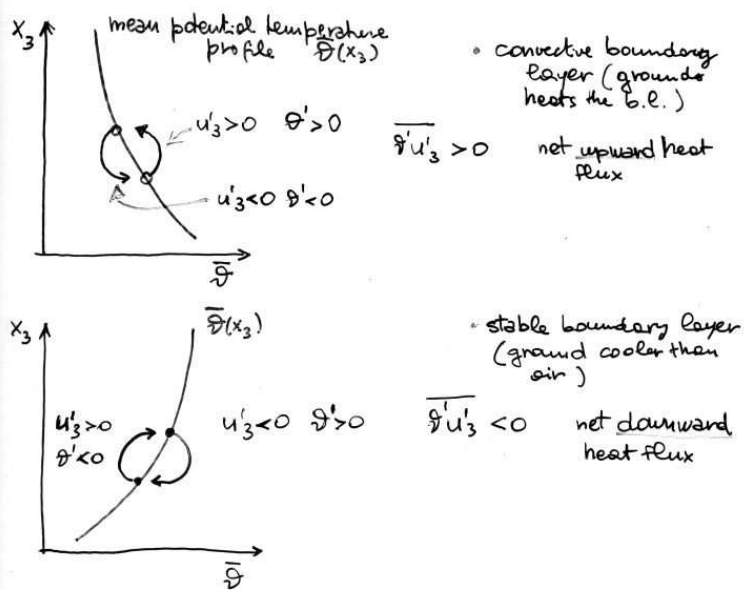


Figura 3.2: Interpretazione (semplificata) dei termini di correlazione.

La viscosita' turbolenta e' una caratteristica del flusso (quindi dipende dal numero di Reynolds, dalle condizioni al contorno, dalle forze che agiscono sul fluido, ...), non una proprieta' intrinseca. Tuttavia sulla base di questo concetto si formulano le chiusure necessarie alla soluzione approssimata delle equazioni per i momenti. Se ne puo' dare una semplice formulazione, in analogia con la diffusivita' molecolare ed il concetto di libero cammino medio.

In riferimento al caso illustrato, le fluttuazioni nella velocita' orizzontale possono essere espresse come differenza tra velocita' media orizzontale alla quota z e alla quota $z + l'$, dove l' rappresenta la dimensione del vortice che produce il moto. Percio' si pone:

$$u' = -[\bar{u}(z + l') - \bar{u}(z)] \approx -l' \frac{d\bar{u}}{dz} \quad (3.95)$$

e anche

$$-\overline{u'w'} = \overline{l'w'} \frac{d\bar{u}}{dz} \quad (3.96)$$

da cui si definisce la viscosita' turbolenta per la quantita' di moto:

$$K_m \equiv \frac{-\overline{u'w'}}{\frac{d\bar{u}}{dz}} = \overline{l'w'} \quad (3.97)$$

Poiche' u' e w' sono correlate (e il segno della correlazione dipende dal segno del gradiente verticale di velocita' media), si pone $w' \sim -\alpha \text{sgn}(d\bar{u}/dz)u' = \alpha l' \text{sgn}(d\bar{u}/dz) d\bar{u}/dz$. Si puo' notare che questa ipotesi corrisponde ad una relazione tra correlazione e varianza: $|\overline{u'w'}| = \alpha \overline{u'^2}$. Il valore del coefficiente α verra' stimato dalle osservazioni sperimentali, per esempio nel QNBL.

Si ottiene:

$$-\overline{u'w'} = \alpha \overline{l'^2} \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2 \text{sgn} \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right) \quad (3.98)$$

e

$$K_m = \alpha \overline{l'^2} \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right| \quad (3.99)$$

La radice quadrata della varianza della dimensione dei vortici $l = \alpha^{1/2} \sqrt{\overline{l'^2}}$ e' chiamata lunghezza di mescolamento.

Questo argomento verra' ripreso nella discussione sulle chiusure delle equazioni per i momenti.

3.13.1 Una considerazione su flussi orizzontali e verticali di calore

Se le correlazioni tra u'_1 e u'_3 e tra u'_3 e ϑ' sono non nulle, allora anche la correlazione tra u'_1 e ϑ' e' non nulla. L'argomento euristico esposto in precedenza suggerisce che se $\overline{u'_3\vartheta'} > 0$ allora $\overline{u'_1\vartheta'} < 0$. Indipendentemente da

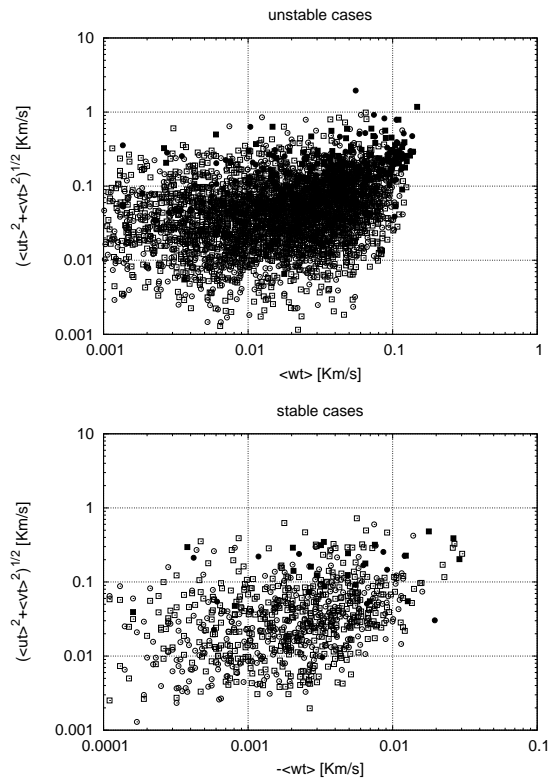


Figure 3.3: Horizontal heat flux as function of the vertical one, from CCT data (Jne-July 2012). Circles refer to a sonic anemometer at 7.5 m height, squares to a sonic anemometer at 3.7 m. Full symbols: momentum flux $\langle -0.1 m^2/s^2$; open symbols $\langle -0.1 m^2/s^2$.

ogni disomogeneita', la presenza di un flusso di calore verticale in uno strato limite caratterizzato da 'shear' implica la presenza di un flusso turbolento orizzontale.

An example from CCT data (Ny Alesund, Norway) is reported in Fig. 3.3.

Si sottolinea ancora che l'esistenza del termine $\overline{u'_1 v'}$ $\neq 0$ in assenza di gradienti orizzontali di temperatura media mostra che la relazione flusso-gradiente non e' verificata in generale per flussi turbolenti.

3.14 A further note about 'frozen turbulence' approximation

See Wyngaard and Coté (1971), pag. 191: let write Taylor 'frozen turbulence' hypothesis as

$$\frac{Du}{Dt} = 0 \quad (3.100)$$

If $\overline{u_1}$ is steady and the other mean components of velocity are zero it results:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = - \left[(\overline{u} + u') \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} \right] \quad (3.101)$$

and retaining only the first order terms (i.e. assuming that the scale of fluctuations is much smaller than the mean velocity) the relation

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = - \frac{1}{\overline{u}} \frac{\partial u'}{\partial t} \quad (3.102)$$

may be integrated giving $u'(x_2) - u'(x_1) = u'(t_1) - u'(t_2)$ being $x = \overline{u}t$, which allows to compute spatial correlations from time measurements.

Capitolo 4

Introduzione alla turbolenza

4.1 Cosa e' la turbolenza?

Un flusso turbolento e' caratterizzato da:

aleatorieta' delle variabili di stato

proprietà di mescolamento del flusso

esistenza di scale di moto interne con caratteristiche ben definite

In un fluido in moto laminare la velocita' in un dato punto rimane costante se le condizioni al contorno sono indipendenti dal tempo. Risultati sperimentali (Reynolds, 1883) mostrano che aumentando la velocita' del fluido in un contenitore (un tubo), mantenendo costanti le dimensioni del contenitore e le proprietá molecolari, si ha la comparsa di fluttuazioni della velocita', e questo fenomeno diventa preponderante se il numero di Reynolds $\mathcal{R}_e = UL/\nu$ supera un valore critico (che dipende dalle condizioni sperimentali, in generale superiore a 1000). Nella definizione del numero di Reynolds compaiono le scale di lunghezza e velocita' che caratterizzano il flusso (esempio: diametro del tubo e velocita' media), cosí come la viscosita' cinematica del fluido.

La casualita' delle caratteristiche del moto lo rende imprevedibile. La velocita' del flusso e le altre variabili (pressione, densita' e temperatura) vengono considerate come variabili casuali: questo comporta una descrizione statistica del fenomeno.

Una seconda importante proprietá del moto turbolento e' l'efficienza nel mescolamento delle proprietá del flusso: infatti il trasporto sia di momento sia di traccianti passivi e' molto piu' intenso in questo caso che nel caso di moto laminare. Sperimentalmente, in condizioni opportune (ma nient'affatto universali) si osserva flusso di una proprietá nella direzione in cui tale quantita' diminuisce (nella direzione in cui il gradiente e' negativo), e questo fatto induce ad estendere il concetto di diffusivita' (caratteristico del regime laminare) alla turbolenza, e quantificare il mescolamento in maniera del tutto simile alla viscosita' molecolare. Questa descrizione non e' in generale esatta.

Se sono disponibili formulazioni indipendenti del flusso e della forma del campo di concentrazione, la relazione flusso-gradiente permette di calcolare la viscosita' turbolenta. Questa viscosita' e' funzione, per numeri di Reynolds

elevati, del tipo di moto e non delle caratteristiche del fluido, e perciò in generale dipende dalla geometria del flusso. (In alcuni casi di interesse atmosferico, non è neppure calcolabile.) In generale non può essere estrapolata al di fuori della situazione in cui è stata derivata, anche se questa è la prassi per ricavare le parametrizzazioni per i modelli meteorologici e di dispersione.

Un terzo importante aspetto che caratterizza il moto turbolento è la presenza di un grande intervallo di scale di moto: le scale (i vortici) più grandi dissipano la loro energia producendo vortici più piccoli. Grazie all'invarianza delle scale delle equazioni del moto in assenza di viscosità (le equazioni di Navier Stokes inviscide) si può affermare che esiste un intervallo di scale dimensionali in cui la dinamica del moto è indipendente dalla viscosità (cioè dalle caratteristiche molecolari del fluido). Quindi almeno per le caratteristiche di grande scala (alle scale di moto più piccole gli effetti della viscosità diventano importanti) si può trattare il flusso turbolento ad alto numero di Reynolds indipendentemente dal numero di Reynolds stesso.

4.2 Caratteristiche universali della turbolenza: descrizione euleriana

Dalle eq. di Navier-Stokes, in assenza di effetti di forze esterne, nel limite di $\mathcal{R}_e \rightarrow \infty$, si ha

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_{00}} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (4.1)$$

che è invariante per modifiche delle scale di lunghezza, tempo e velocità ottenute moltiplicando per una costante come segue:

$$x \rightarrow \lambda x \quad (4.2)$$

$$u_i \rightarrow \lambda^h u_i \quad (4.3)$$

e quindi

$$t \rightarrow \lambda^{1-h} t \quad (4.4)$$

(la scala per p/ρ_{00} e u^2).

La dinamica rappresentata dalle equazioni è la stessa se si può fare la modifica indicata alle scale (quindi, per numero di Reynolds alto, e se le condizioni al contorno e/o iniziali hanno scale molto maggiori di quelle utilizzate. Dunque questa invarianza varrà (approssimativamente) in uno specifico intervallo di scale spaziali, che prende il nome di intervallo inerziale ('inertial subrange').

Dall'equazione per l'energia cinetica turbolenta (Eq. 3.85), in assenza di forze esterne, effettuando la stessa sostituzione, si ha

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} q^2 \right) = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{p' u'_j}}{\rho_{00}} + \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} \right) - \lambda^{3h-1} \varepsilon \quad (4.5)$$

il che implica $h = 1/3$ e la dissipazione indipendente dalla scala.

L'analisi dimensionale indica che:

$$[\varepsilon] = \frac{U^3}{L} \quad (4.6)$$

Nell'intervallo inerziale ε e' indipendente dalla scala, cioe' costante rispetto alla dimensione l dei vortici; la varianza della velocita' cresce come $l^{2/3}$:

$$U_l^2 \sim \varepsilon^{2/3} l^{2/3} \quad (4.7)$$

Si puo' stimare l'estremo inferiore dell'intervallo inerziale assumendo che per tale valore della scala spaziale, L_K , il numero di Reynolds sia $\mathcal{O}(1)$:

$$1 \simeq \frac{L_K U_{L_K}}{\nu} = \frac{\varepsilon^{1/3} L_K^{4/3}}{\nu} \quad (4.8)$$

da cui

$$L_K \simeq \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4} \quad (4.9)$$

Se si calcola il numero di Reynolds del flusso sulla base dell'estremo superiore dell'intervallo inerziale L , a cui corrisponde una velocita' U_L , si puo' stimare l'ampiezza dell'intervallo in funzione di \mathcal{R}_e :

$$\frac{L}{L_K} = \frac{L}{\varepsilon^{-1/4} \nu^{3/4}} = \frac{L U_L^{3/4} L^{-1/4}}{\nu^{3/4}} = \mathcal{R}_e^{3/4} \quad (4.10)$$

Nell'intervallo inerziale lo spettro di ciascuna componente della velocita' dipende dalla dissipazione (costante) e dalla scala spaziale l (dal numero d'onda $k \sim l^{-1}$). Per ragioni dimensionali

$$[E(k)dk] = U_l^2 \quad (4.11)$$

e quindi

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} l^{2/3} k^{-1} = \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (4.12)$$

Si nota che, mentre la varianza della velocita' cala con la scala, cioe' $U_l \sim l^{1/3}$, la varianza delle derivate spaziali cresce al diminuire della scala, cioe' $\Delta U_l / \Delta l \sim l^{-2/3}$. Ricordando che la dissipazione ε e' proporzionale alla media dei quadrati delle derivate spaziali della velocita', questa osservazione suggerisce che il contributo alla dissipazione media sia maggiore dalle scale piu' piccole.

4.3 Descrizione lagrangiana

Anziche' considerare il campo di velocita' del flusso, od una qualsiasi sua proprieta' in punti e ad istanti definiti (descrizione euleriana) si possono considerare le traiettorie percorse da particelle di fluido (descrizione lagrangiana). Banalmente la traiettoria e' data da

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau) d\tau \quad (4.13)$$

dove la velocita' della particella $\mathbf{v}(\tau)$ e' data dalla velocita' euleriana del flusso nel punto $\mathbf{x}(\tau)$:

$$\mathbf{v}(\tau) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\tau), \tau) \quad (4.14)$$

Nell'intervallo inerziale possono essere fatte considerazioni analoghe alle precedenti se si considera l'evoluzione temporale della differenza di velocita' rispetto ad un istante iniziale, seguendo la traiettoria delle particelle di fluido. In tale intervallo la differenza dovra' dipendere solo dalla dissipazione e dal tempo trascorso, pertanto:

$$V_t^2 \equiv \overline{(V(t) - V(0))^2} \sim \varepsilon t \quad (4.15)$$

Si noti che la relazione 4.7 vale ad uno stesso istante, in due punti a distanza l uno dall'altro, mentre la relazione 4.15 vale lungo una traiettoria, a due istanti separati dall'intervallo temporale t (e quindi anche in due punti diversi). la prima e' una relazione 'euleriana', la seconda 'lagrangiana'.

Una semplice conseguenza e' la pendenza dello spettro temporale. Per motivi dimensionali:

$$[E(\omega)d\omega] = V_t^2 \quad (4.16)$$

e quindi

$$E(\omega) \sim \varepsilon t \omega^{-1} \sim \varepsilon \omega^{-2} \quad (4.17)$$

Lo spettro lagrangiano in frequenza ha dunque una diversa pendenza nell'intervallo inerziale rispetto a quello euleriano in numeri d'onda. Naturalmente la trasformazione di turbolenza congelata permette di commutare da tempi a distanze, e da frequenze a numeri d'onda, lasciando inalterata la pendenza ($k^{-5/3}$ ovvero $\omega^{-5/3}$) degli spettri euleriani.

4.4 A basic paradigm

Inertial subrange theory (Kolmogorov, 1941) gives the interpretation paradigm for velocity spectra, assuming the existence of the (universal) inertial subrange.

The second order structure functions read:

$$D^{(2)}(r) = \overline{[u(r) - u(0)]^2} = 2 \left(\overline{u^2} - R(r) \right) = C_K \varepsilon^{2/3} r^{2/3} \quad (4.18)$$

$$D^{(2)}(t) = \overline{[v(t) - v(0)]^2} = 2 \left(\overline{u^2} - R(t) \right) = C_0 \varepsilon t \quad (4.19)$$

where $\overline{v(\tau)^2} = \overline{u^2}$ for any τ (thanks to homogeneity and steadyness). Eq. 4.18 is an Eulerian relationship, Eq. 4.19 a Lagrangian one. Valori indicativi delle costanti (da esperimenti e simulazioni numeriche): $C_K = 2$, $C_0 = 6.2$ (Ouellette et al., 2006).

It is important to remember also that the following exact relationship holds:

$$D^{(3)}(r) = \overline{[u(r) - u(0)]^3} = -\frac{4}{5} \varepsilon r \quad (4.20)$$

see Monin and Yaglom (1975, pag. 397), Frisch (1995, pag.76).

A model for the Lagrangian correlation (Gifford, 1982) is

$$R(t) = \overline{u^2} \exp(-t/T) \quad (4.21)$$

For $t \ll T$, in the inertial subrange, $R(t) \simeq \overline{u^2}(1 - t/T)$ and $D^{(2)}(t) \simeq 2\overline{u^2}t/T$. Comparing with 4.19 we obtain an expression for the dissipation as a function of the integral quantities characterizing the flow (Tennekes, 1982):

$$\varepsilon = \frac{2\overline{u^2}}{C_0 T} \quad (4.22)$$

A model for the Eulerian correlation was suggested by Durbin (1980):

$$R(r) = \overline{u^2} \left[1 - \left(\frac{r^2}{r^2 + L^2} \right)^{1/3} \right] \quad (4.23)$$

which gives an integral length scale different from L :

$$L_D = \frac{1}{\overline{u^2}} \int_0^\infty R(r) dr \simeq 0.75L \quad (4.24)$$

Note that, for $r \ll L$:

$$D^{(2)}(r) = 2[\overline{u^2} - R(r)] \simeq 2\overline{u^2} \left(\frac{r}{L} \right)^{2/3} \quad (4.25)$$

which is Kolmogorov (1941) compliant. Comparing with Eq. 4.18 an Eulerian expression for the dissipation results:

$$\varepsilon = \frac{2^{3/2} \overline{u^2}^{3/2}}{C_K^{3/2} L} \quad (4.26)$$

By eliminating ε from Eqs. 4.22 and 4.26 a relationship among the integral scales characterizing the inertial sublayer is obtained:

$$\frac{L}{T \overline{u^2}^{1/2}} = \frac{2^{1/2} C_0}{C_K^{3/2}} \quad (4.27)$$

which gives an estimate of the Eulerian-to-Lagrangian characteristic time scale ratio (Maurizi et al., 2004).

4.4.1 Correlation for small lag

For $|t/T| \ll 1$ or $|r/L| \ll 1$ the proper model for correlation is determined as a power series: for instance using space:

$$R(r) = \overline{u'^2}[1 - a^2(r/L)^2] \text{ for } |r/L| \ll 1 \quad (4.28)$$

This form is consistent with the requirement $R(r) = R(-r)$. It defines a microscale of length Λ :

$$\Lambda = \frac{L}{a} \quad (4.29)$$

4.4.2 Some spectra and structure functions

From the correlation Eq. 4.21 si puo' ottenere la forma corrispondente dello spettro. Da Gradshteyn and Ryzhik (1980, pag. 477):

$$\int_0^\infty \exp(-px) \cos(qx) dx = \frac{p}{p^2 + q^2} \quad (4.30)$$

e quindi

$$E(\omega) = \frac{2\overline{u'^2}}{\pi} \int_0^\infty \exp(-t/T) \cos(\omega t) dt = \frac{2\overline{u'^2}T}{\pi} \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} \quad (4.31)$$

In particolare

$$E(0) = \frac{2\overline{u'^2}T}{\pi} \quad (4.32)$$

e, per $\omega \gg T^{-1}$ (using Eq. 4.22),

$$E(\omega) \simeq \frac{2\overline{u'^2}}{\pi T} \omega^{-2} = \frac{C_0 \varepsilon}{\pi} \omega^{-2} \quad (4.33)$$

che restituisce la pendenza dello spettro lagrangiano ricavata da considerazioni dimensionali per l'intervallo inerziale e fornisce il valore della costante di proporzionalita'.

From Monin and Yaglom (1975, pag. 90), given

$$D(r) = 2 \int_0^\infty (1 - \cos(kr)) E(k) dk \quad (4.34)$$

if

$$D(r) = Ar^\gamma, \quad A > 0, \quad 0 < \gamma < 2 \quad (4.35)$$

it results

$$E(k) = \frac{C}{k^{\gamma+1}} \quad (4.36)$$

with

$$C = \frac{A}{2 \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^{\gamma+1}} dx} = \frac{\Gamma(\gamma+1) \sin(\pi\gamma/2)}{\pi} A \quad (4.37)$$

Thus, for the Eulerian structure function $D^{(2)}(r)$ (Eq. 4.18):

$$E(k) = \frac{\Gamma(5/3) \sin(\pi/3)}{\pi} C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \simeq 0.249 C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (4.38)$$

and for the Lagrangian structure function $D^{(2)}(t)$ (Eq. 4.19):

$$E(\omega) = \frac{\Gamma(2) \sin(\pi/2)}{\pi} C_0 \varepsilon \omega^{-2} = \frac{C_0 \varepsilon}{\pi} \omega^{-2} \quad (4.39)$$

4.4.3 From k to f

The equivalence of the spectrum (in frequency f) obtained from fixed point time series (of wind velocity) and that expressed in wavenumber (k) space follows from the assumption that a mean velocity \bar{u} can be defined for the relevant time range.

$$k = 2\pi \frac{f}{\bar{u}} \quad (4.40)$$

$$E(k) dk = E\left(\frac{2\pi f}{\bar{u}}\right) \frac{2\pi}{\bar{u}} df \quad (4.41)$$

equivalent to (from Eq. 4.38):

$$E(k) dk = \frac{0.249 C_K}{(2\pi)^{2/3}} \bar{u}^{-2/3} \varepsilon^{2/3} f^{-5/3} df \quad (4.42)$$

We define $E(f)$

$$E(f) = C_1 \bar{u}^{-2/3} \varepsilon^{2/3} f^{-5/3} \quad (4.43)$$

with $C_1 = 0.249 C_K / (2\pi)^{2/3}$.

4.4.4 A few experimental correlations and time scales in the surface layer

Tempi scala derivati da dati di anemometria sonica: vedi Fig. 4.1.

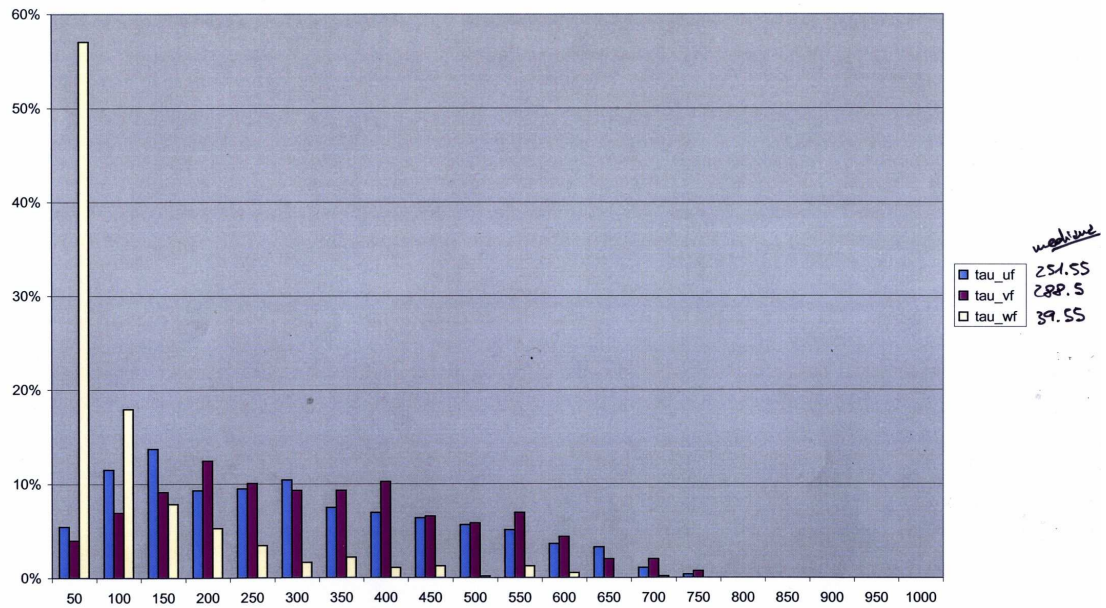


Figura 4.1: Istogramma dei tempi di correlazione per u_1 , u_2 , u_3 , da dati di anemometro sonico nel surface layer (De Franceschi, comunicazione personale). I valori mediani sono: 252s, 289s, 40s rispettivamente.

4.5 La pdf della velocita'

4.5.1 Turbolenza omogenea, isotropa, stazionaria

In condizioni di turbolenza omogenea, isotropa e stazionaria le osservazioni e le simulazioni numeriche suggeriscono che la pdf della velocita' e' gaussiana, mentre non lo e' la pdf delle derivate della velocita': vedi le Figure 4.2, 4.3, 4.4, dalle simulazioni numeriche di Vincent and Meneguzzi (1991).

Per motivi di simmetria, $\overline{u'_i u'_j} = \sigma^2 \delta_{ij}$, dove σ^2 e' la varianza di ciascuna componente della velocita'.

4.5.2 La turbolenza di parete e la turbolenza convettiva

Abbandonare le restrizioni di omogeneita' ed isotropia e' necessario per dare un quadro ragionato dello strato limite.

Per turbolenza di parete sono disponibili molti risultati di laboratorio e misure in campo. Si e' visto che la pdf della velocita' longitudinale non e' in

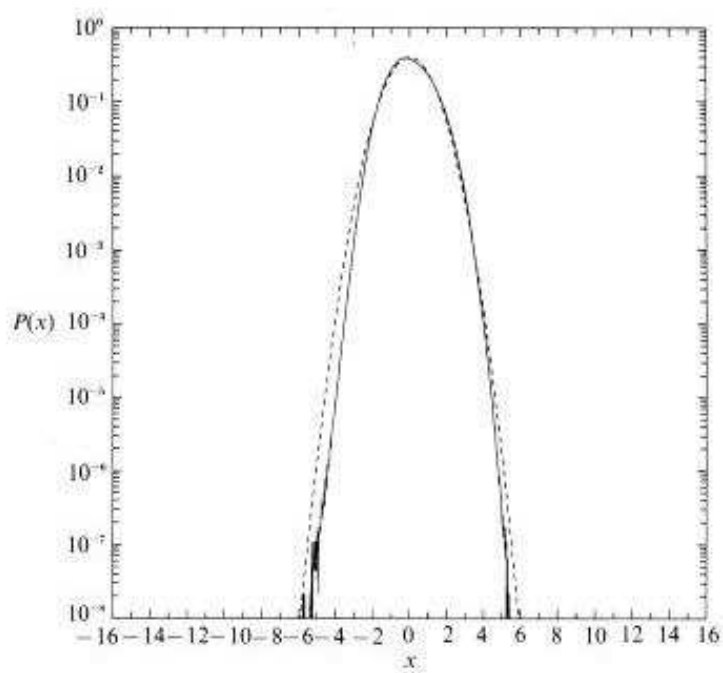


Figura 4.2: *pdf* di una componente della velocità, diciamo u_1 , normalizzata alla sua deviazione standard, dalla DNS di Vincent and Meneguzzi (1991). La curva tratteggiata rappresenta la distribuzione gaussiana con la stessa varianza.

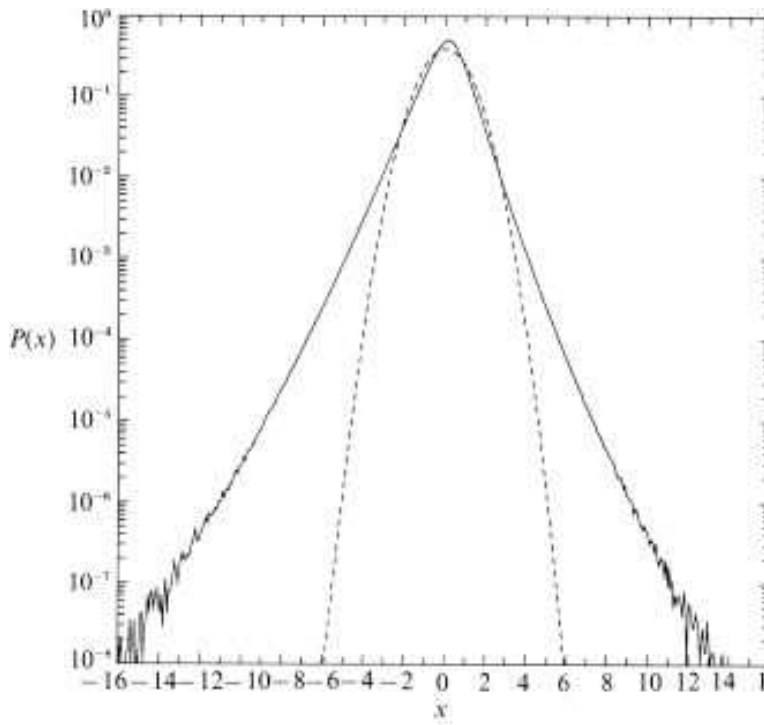


Figura 4.3: Come in Fig. 4.2, per la *pdf* di $\partial u_1/\partial x_1$.

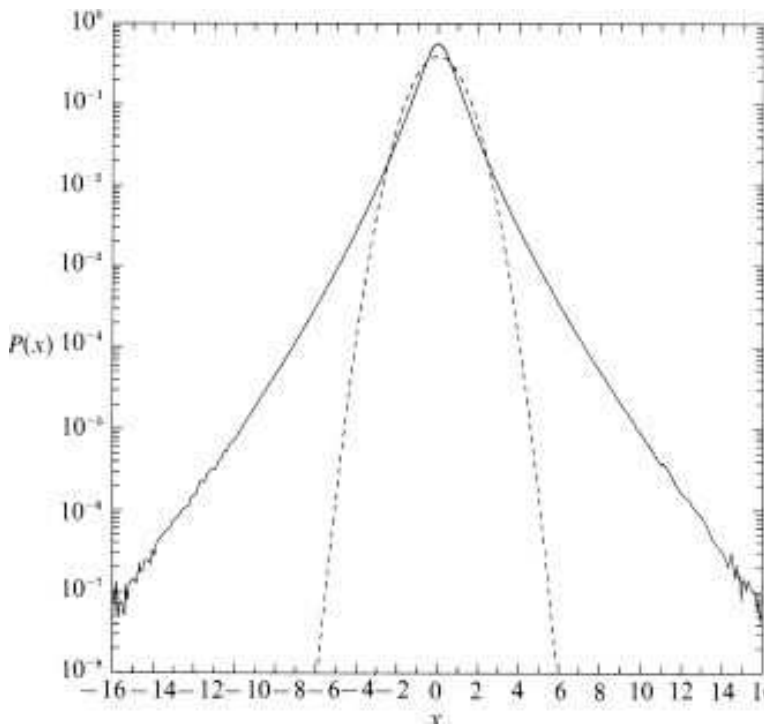


Figura 4.4: Come in Fig. 4.2, per la *pdf* di $\partial u_1/\partial x_2$.

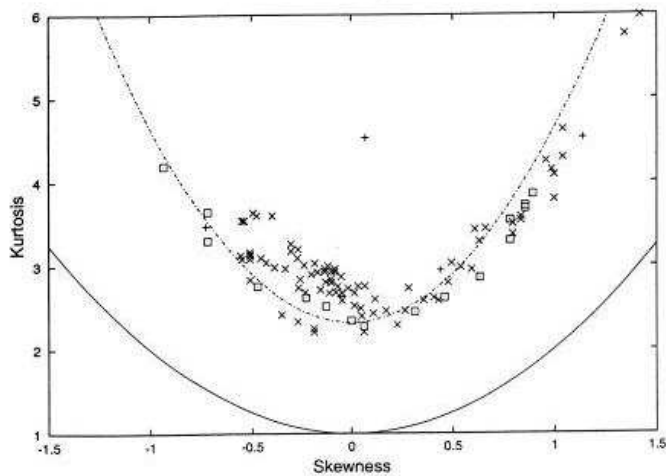


Figura 4.5: Kurtosis in funzione della skewness per la componente lungo il vento medio delle fluttuazioni di velocità, in strati limite dominati dallo 'shear'. La linea continua rappresenta il limite statistico (non esistono distribuzioni al di sotto di tale confine). La parabola tratteggiata rappresenta un 'fit' di minimi quadrati.

generale gaussiana; skewness e kurtosis dipendono in generale dalla distanza dalla parete.

Alcuni dati sono riportati nelle Figure 4.5, 4.6 e 4.7 da Tampieri et al. (2001). In particolare si osserva come la componente della velocità parallela alla parete e normale alla velocità media (Fig. 4.7) sia simmetrica ma non necessariamente gaussiana.

Analoghi risultati si hanno in casi convettivi: vedi Figura 4.8. In particolare è ben noto come la *pdf* della velocità verticale nello strato limite convettivo sia fortemente asimmetrica, con momento terzo positivo.

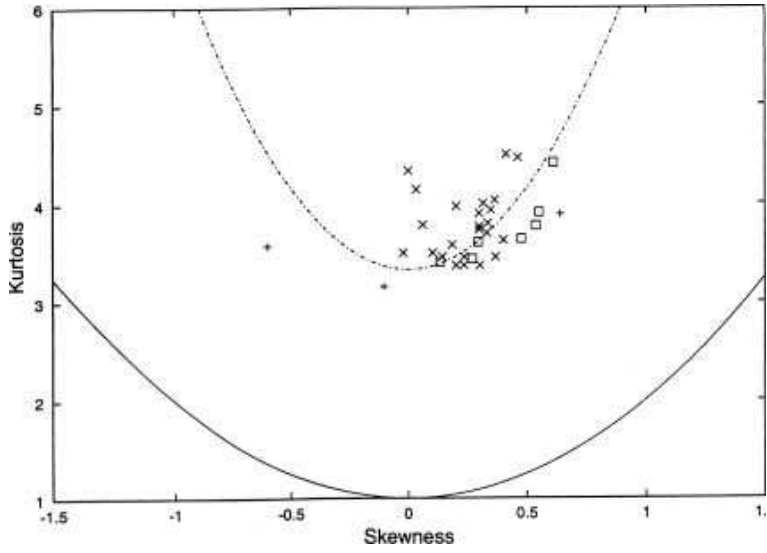


Figura 4.6: Come in Figura 4.5 per la componente normale alla parete.

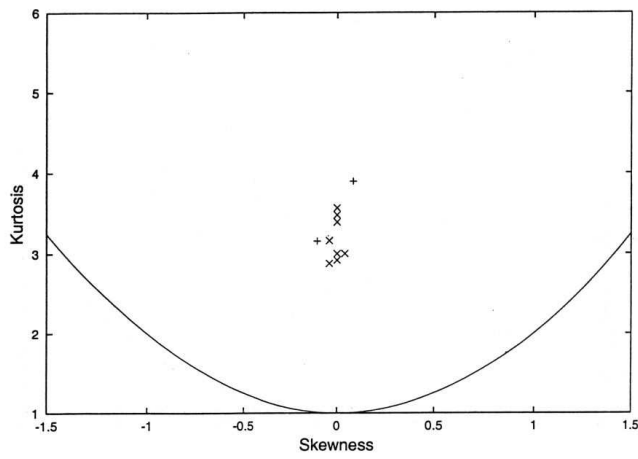


Figura 4.7: Come in Figura 4.5 per la componente normale alla velocità media e parallela alla parete.

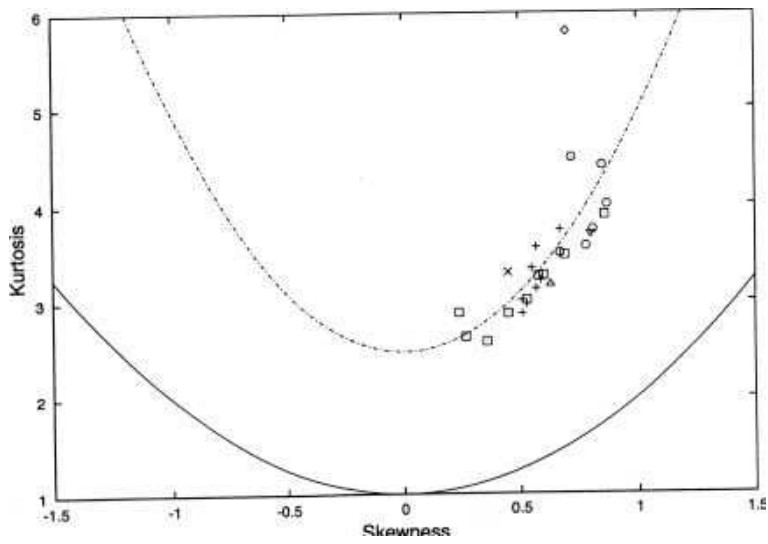


Figura 4.8: Come in Figura 4.6 per strati limite convettivi.

Capitolo 5

Il paradigma: lo strato limite orizzontalmente omogeneo su terreno piatto

5.1 Osservazioni sperimentali

Alcune osservazioni di flussi turbolenti di quantita' di moto e di temperatura sono riportate nella figura 5.1, che riguarda condizioni approssimativamente neutrali sul mare (da Garratt, 1992).

Profili in altre condizioni di stabilita' saranno discussi in seguito.

E' importante ricordare che in condizioni stabili in particolare si possono avere profili molto diversi, che verranno discussi in seguito.

Se i flussi turbolenti sono caratterizzati da un valore al suolo, che viene usato in generale come valore di scala, e tendono a zero ad una quota, che viene identificata come l'altezza h dello strato limite, si puo' ritenere di essere in presenza di uno strato limite determinato dalla turbolenza presso il suolo. Si osserva che questo schema ideale non e' sempre soddisfatto dalle condizioni reali, e che lo strato limite e' influenzato anche dalla struttura del flusso al di sopra di esso.

Dal valore del flusso della quantita' di moto in prossimita' del suolo si definisce la velocita' di attrito ('friction velocity'):

$$u_* = \left(\overline{u_1' u_3'}^2 + \overline{u_2' u_3'}^2 \right)^{1/4} \quad (5.1)$$

e da qui si ottiene anche una temperatura di scala, legata al flusso di temperatura al suolo:

$$\vartheta_* = \overline{u_3' \vartheta'}|_0 / u_* \quad (5.2)$$

Il pedice 0 indica che si fa riferimento a valori misurati presso il suolo.

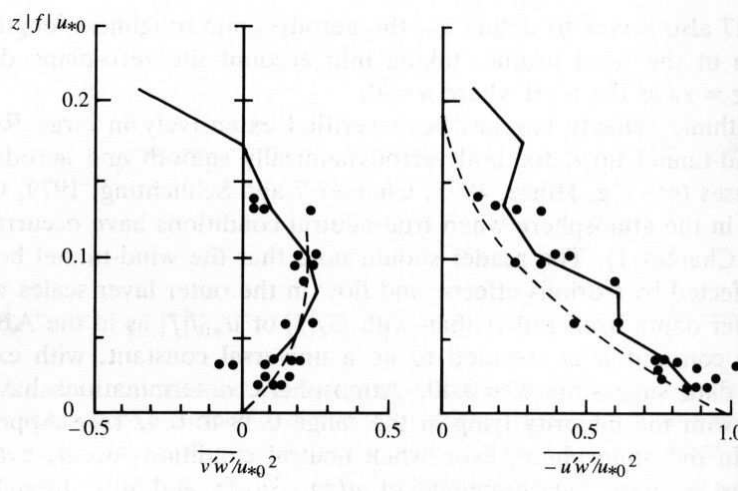


Figura 5.1: Flussi turbolenti in condizioni neutrale sul mare. Da Garratt (1992).

5.2 Le equazioni per la quantita' di moto media

Nel caso di omogeneita' orizzontale e di terreno piatto dall'equazione di continuita' Eq. 3.59 si ha:

$$\bar{u}_3(x_3) = 0 \quad (5.3)$$

Dall'equazione per la quantita' di moto Eq. 3.57 si ottengono le equazioni per le componenti \bar{u}_1 e \bar{u}_2 :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_{00}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_3^2} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_3}}{\partial x_3} \quad (5.4)$$

Se possiamo trascurare la dipendenza della pressione dalla quota, si possono usare le Eq. 3.23 per eliminare la pressione dall'equazione precedente. Inoltre si evidenzia come gli ultimi due termini rappresentino la divergenza verticale dei flussi totali (viscoso e turbolento) di quantita' di moto:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = \varepsilon_{ij3} f (\bar{u}_j - u_{gj}) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_3} - \overline{u'_i u'_3} \right), \quad i = 1, 2 \quad (5.5)$$

Questa equazione mostra che se i flussi non sono costanti con la quota lo strato limite non puo' essere contemporaneamente stazionario e unidimensionale.

5.3 L'equazione per la temperatura potenziale media

Nelle stesse condizioni, l'Eq. 3.60 diventa

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\kappa_T \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x_3} - \overline{u'_3 \vartheta'} \right) \quad (5.6)$$

Del tutto analoga e' l'equazione per lo scalare passivo, la cui concentrazione sia indicata da \bar{c} . Anche in questo caso possiamo notare che se il flusso dello scalare non e' costante con la quota, la soluzione non puo' essere stazionaria.

5.4 'Inner' e 'outer scaling'

Consideriamo l'eq. 5.5 allo stato stazionario. Per semplicita', assumiamo $f > 0$. Si ha

$$f(\bar{v} - v_g) - \frac{d\overline{u'w'}}{dz} = 0 \quad (5.7)$$

$$-f(\bar{u} - u_g) - \frac{d\overline{v'w'}}{dz} = 0 \quad (5.8)$$

Le differenze tra il vento alla quota z entro lo strato limite e il vento alla sommita' dello strato limite (il vento geostrofico), $\bar{u}(z) - u_g$ e $\bar{v}(z) - v_g$, sono dovute al flusso turbolento di quantita' di moto, e dunque u_* puo' essere utilizzata come velocita' di scala. Definendo una quota nondimensionale $\xi = zf/u_*$ le equazioni 5.7 e 5.8 diventano (moltiplicando per $(fu_*)^{-1}$):

$$\frac{\bar{v} - v_g}{u_*} = \frac{d(\overline{u'w'}/u_*^2)}{d\xi} \quad (5.9)$$

$$\frac{\bar{u} - u_g}{u_*} = -\frac{d(\overline{v'w'}/u_*^2)}{d\xi} \quad (5.10)$$

Queste equazioni indicano che il moto nello strato limite lontano dal suolo dipende solo dal rapporto tra il modulo del vento geostrofico e la velocita' di attrito. Suggestiscono inoltre che il rapporto u_*/f sia la scala per l'altezza dello strato limite neutrale (di Ekman, dunque influenzato dalla rotazione). La relazione

$$h = \alpha \frac{u_*}{f} \quad (5.11)$$

con $\alpha \simeq 0.2 \div 0.3$ viene usata per stimare l'altezza dello strato limite, in assenza di forzatura termica al suolo e di gradiente di temperatura stabile al di sopra dello strato limite stesso, alle medie latitudini.

La quantita' u_*/f e' dunque la lunghezza di scala adeguata per il cosiddetto 'outer scaling'.

Assumiamo ora che esista una scala z_s appropriata presso il suolo. Impostiamo che $z_s \ll u_*/f$. Moltiplicando le equazioni 5.7 e 5.8 per z_s/u_*^2 si ha

$$(fz_s/u_*) \frac{\bar{v} - v_g}{u_*} = \frac{d(\overline{u'w'}/u_*^2)}{d(z/z_s)} \quad (5.12)$$

$$(fz_s/u_*) \frac{\bar{u} - u_g}{u_*} = - \frac{d(\overline{v'w'}/u_*^2)}{d(z/z_s)} \quad (5.13)$$

Nel limite di grandi valori del numero di Rossby di attrito ('friction Rossby number') $\mathcal{R}_{of} = u_*/fz_s$ le equazioni precedenti mostrano che i momenti secondi $\overline{u'w'}$ e $\overline{v'w'}$ sono costanti con la quota. Scegliendo gli assi in modo tale che $\bar{v}(0) = 0$, e assumendo per simmetria che $\overline{v'w'}|_0 = 0$ si puo' identificare la direzione x tale che il moto avvenga nel piano $x - z$. z_s e' dunque la scala adatta per il cosiddetto 'inner scaling' e caratterizza uno strato, lo strato superficiale ('surface layer'), dove il flusso di quantita' di moto e' costante con la quota. In queste condizioni si puo' ridefinire la 'friction velocity':

$$u_* = \left(-\overline{u_1' u_3'}|_0 \right)^{1/2} \quad (5.14)$$

Pertanto nello strato limite planetario (in un sistema rotante, non in laboratorio) si ha una scala esterna, u_*/f , ed una scala interna, z_s . A quote comparabili con la scala esterna, si ha rotazione del vento con la quota. A quote comparabili con la scala interna, il vento non ruota e i flussi turbolenti sono indipendenti dalla quota.

Capitolo 6

Lo strato limite quasi neutrale (QNBL)

6.1 Una annotazione introduttiva

Lo strato limite puo' essere rigorosamente neutrale solo se i flussi di calore sono nulli: se l'aria e' in equilibrio termico con la superficie sottostante (p.es., sul mare, o in situazioni di cielo coperto): quindi il gradiente verticale di temperatura potenziale e' nullo $d\vartheta_0/dz = \overline{\partial\vartheta}/\partial z = 0$. Lo strato limite puo' comportarsi approssimativamente in modo neutrale se il flusso di calore e' piccolo rispetto al flusso di quantita' di moto: questa situazione si puo' verificare in presenza di venti intensi e di deboli effetti termici.

6.2 Il caso della stratificazione debole

Si assumano condizioni stazionarie e orizzontalmente omogenee per un flusso su una superficie orizzontale, per cui la velocita' verticale media $\overline{w} = 0$. L'equazione per la componente x (lungo la direzione del vento medio) della quantita' di moto 3.57 si riduce a:

$$\nu \frac{d^2 \overline{u}}{dz^2} + \frac{d(-\overline{u'w'})}{dz} = 0 \quad (6.1)$$

L'equazione per la temperatura potenziale media 3.60 diventa:

$$\kappa_T \frac{d^2 \overline{\vartheta}}{dz^2} + \frac{d(-\overline{\vartheta'w'})}{dz} = 0 \quad (6.2)$$

Trascurando il termine di viscosita' molecolare, l'equazione per l'energia cinetica diventa:

$$-\overline{u'w'} \frac{d\overline{u}}{dz} - \frac{g}{\rho_{00}} \overline{\rho'w'} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\overline{p'w'}}{\rho_{00}} + \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i w'} \right) - \varepsilon \simeq 0 \quad (6.3)$$

oppure, in termini di temperatura potenziale:

$$-\overline{u'w'} \frac{d\bar{u}}{dz} + \frac{g}{\vartheta_{00}} \overline{\vartheta'w'} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\overline{p'w'}}{\rho_{00}} + \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i w'} \right) - \varepsilon \simeq 0 \quad (6.4)$$

E' possibile in generale valutare sperimentalmente i termini dell'equazione che contengono momenti della velocita' e della temperatura. I momenti tripli richiedono anche una misura della correlazione tra fluttuazioni di velocita' e pressione. La dissipazione viene determinata dallo spettro (Eqs. 4.38 oppure 4.43) e/o utilizzando la relazione Eq. 4.20.

Il termine di galleggiamento puo' fungere da sorgente di energia cinetica turbolenta, se il flusso di calore e' positivo: $\overline{w'\vartheta'} > 0$, oppure da pozzo, se $\overline{w'\vartheta'} < 0$. Il numero di Richardson di flusso e' definito come il rapporto tra i due termini di produzione/pozzo di turbolenza:

$$\mathcal{R}_f = \frac{\frac{g}{\vartheta_{00}} \overline{w'\vartheta'}}{\overline{u'w'} \frac{d\bar{u}}{dz}} \quad (6.5)$$

e puo' essere utilizzato per riscrivere l'eq. 6.4:

$$-\overline{u'w'} \frac{d\bar{u}}{dz} (1 - \mathcal{R}_f) - \frac{d\mathcal{T}}{dz} - \varepsilon = 0 \quad (6.6)$$

dove

$$\mathcal{T} = \left(\frac{\overline{p'w'}}{\rho_{00}} + \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i w'} \right) \quad (6.7)$$

Si noti che il numero di Richardson e' una variabile locale. Numeri di Richardson negativi indicano che i flussi di calore forniscono energia alla turbolenza (stratificazione instabile), mentre \mathcal{R}_f positivi corrispondono a stratificazione stabile; $\mathcal{R}_f = 0$ corrisponde al caso neutrale ideale. Inoltre l'eq.6.6 suggerisce che, trascurando la divergenza dei termini di terzo ordine, per $\mathcal{R}_f > 1$ la produzione di turbolenza dovuta allo 'shear' non bilancia la dissipazione: in queste condizioni ci si aspetta che la turbolenza non possa essere stazionaria. Questo suggerisce l'esistenza di un valore critico per il numero di Richardson, \mathcal{R}_{fc} per stratificazione molto stabile: indicativamente $\mathcal{R}_{fc} \approx 0.2$. Al di sopra di tale valore tuttavia si osserva ancora turbolenza, che puo' essere intermittente (non stazionaria) o alimentata dalla divergenza dei momenti terzi.

6.3 Le condizioni neutrali

Si consideri il caso limite di flusso di calore nullo, cioe' $\mathcal{R}_f = 0$. La produzione meccanica di energia cinetica turbolenta e' bilanciata dalla dissipazione. L'equazione per la quantita' di moto orizzontale assicura che il flusso verticale di quantita' di moto e' costante.

6.3.1 Profilo di velocita' media nello strato superficiale

Vicino (molto vicino) alla superficie $w' \sim 0$ e $\mathcal{R}_e < 1$: il termine viscoso e' dominante:

$$\nu \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} = 0 \quad (6.8)$$

In questo sottostrato viscoso la velocita' varia linearmente con la distanza dalla parete:

$$\bar{u}(z) \propto z \quad (6.9)$$

Per numeri di Reynolds elevati, per z grandi, si puo' trascurare il termine viscoso e il flusso turbolento di quantita' di moto risulta costante con la quota:

$$-\overline{u'w'} = u_*^2 \quad (6.10)$$

Poiche' il flusso di calore e' nullo non possiamo ottenere una temperatura di scala ne' un gradiente di temperatura: in condizioni neutrale la temperatura potenziale e' costante con la quota.

Occorre a questo punto notare che l'analisi effettuata non introduce una lunghezza di scala, che dia un'indicazione dello spessore dello strato entro cui il flusso di quantita' di moto e' costante. D'altra parte e' fisicamente inverosimile ipotizzare che tale strato si estenda indefinitamente: ci si aspetta che alla sommita' dello strato limite gli scambi tra atmosfera e suolo diventino trascurabili. L'analisi effettuata vale rigorosamente nello strato in cui il flusso di quantita' di moto e' costante: per definizione, lo strato superficiale (surface layer).

La quantita' u_* e' la velocita' di scala che caratterizza la turbolenza. La relazione dimensionale

$$\frac{d\bar{u}}{dz} \propto \frac{u_*}{z} \quad (6.11)$$

implica un profilo logaritmico per la velocita' media

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \quad (6.12)$$

dove $\kappa = 0.4$ e' la costante di von Karman (il cui valore e' determinato sperimentalmente). In linea di principio, z_0 deve essere determinato empiricamente dai dati di profilo di velocita' media. La Tabella 6.1 riporta valori caratteristici di z_0 per diverse superfici, che possono essere usati in mancanza di dati sufficienti o come stima per l'uso nei modelli. In alternativa, si puo' usare la relazione

$$z_0 \simeq h_0/8 \quad (6.13)$$

essendo h_0 la dimensione verticale degli elementi (erba, blocchi) che costituiscono la rugosita'. E' evidente che z_0 dipende in senso stretto dalla dinamica,

e quindi il suo valore derivato dai dati puo' in generale variare anche per una stessa superficie.

It is common practice to define the drag coefficient:

$$c_d = \frac{u_*^2}{\bar{u}^2(z_r)} \quad (6.14)$$

where z_r is a reference height. For a logarithmic profile, c_d is a function of z_r/z_0 .

Sul mare la rugosita' dipende dal vento (Charnock, 1955) che influenza l'altezza delle onde: si puo' applicare la relazione

$$z_0 = \alpha_C u_*^2 / g \quad (6.15)$$

dove la costante di Charnock $0.01 < \alpha_C < 0.03$ (vedi Garratt, 1992, pag. 99) per venti non troppo intensi. Le misure (Powell et al., 2003) mostrano che per valori del vento al di sopra di una soglia (indicativamente, $\bar{u} > 25m/s$) il coefficiente di drag cresce meno rapidamente: see Fig. 6.2.

Si noti che dalle equazioni 6.9 e 6.12 si ottiene un profilo unico di velocita' solo se e' possibile definire una regione di sovrapposizione. L'andamento lineare si applica ad una superficie liscia per $zu_*/\nu \equiv z_+ \lesssim 5$, a quote maggiori ($z_+ > 30$) puo' essere usato il profilo logaritmico (Fig. 6.3). Su superfici ruvide (definibili come quelle per cui $z_0 \gg 5\nu/u_*$) si usa il profilo logaritmico (pur ricordando che esiste comunque uno strato viscoso in contatto con le pareti solide): vedi Fig. 6.4.

Se esiste una copertura della superficie molto alta e strutturata, in genere si utilizza una quota di riferimento d per spostare l'asse delle quote verso l'alto. La forma del profilo di velocita' diventa:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z-d}{z_0} \quad (6.16)$$

In questa formulazione, z_0 e d vanno determinati utilizzando metodi di regressione e dati di velocita' media a diverse quote (per esempio, vedi Martano, 2000); oppure, approssimativamente, sulla base dell'altezza degli ostacoli (vedi Fig. 6.5) e del tipo di superficie.

Table A6. Values of aerodynamic roughness length and zero-plane displacement for a range of natural surfaces

Surface	Reference	h_c (m)	z_0 (m)	d/h_c
<i>soils</i>			0.001–0.01	
<i>grass</i>				
thick	Sutton (1953)	0.1	0.023	
thin	Sutton (1953)	0.5	0.05	
sparse	Clarke <i>et al.</i> (1971)	0.025	0.0012	
	Deacon (1953)	0.015	0.002	
		0.45	0.018	
		0.65	0.039	
<i>crops</i>				
wheat stubble	Izumi (1971)	0.18	0.025	
wheat	Garratt (1977b)	0.25	0.005	
		0.4	0.015	
		1.0	0.05	
corn	Kung (1961)	0.8	0.064	
beans	Thom (1971)	1.18	0.077	
vines	Hicks (1973)	0.9	0.023 ^a	
		1.4	0.12 ^b	
vegetation	Fichtl and McVehil (1970)	1–2	0.2	
<i>woodland</i>				
trees	Fichtl and McVehil (1970)	10–15	0.4	
savannah	Garratt (1980)	8	0.4	0.6
		9.5	0.9	0.75
<i>forests</i>				
pine	Hicks <i>et al.</i> (1975)	12.4	0.32	
pine	Thom <i>et al.</i> (1975)	13.3	0.55	
		15.8	0.92	
coniferous	Jarvis <i>et al.</i> (1976)	10.4 ^c –27.5	0.28–3.9	0.61–0.92
tropical	Thomson and Pinker (1975)	32	4.8	
tropical	Shuttleworth (1989)	35	2.2	0.85

^aFlow parallel to rows.

^bFlow normal to rows.

^cRange in h_c for 11 sites; the mean z_0/h_c is 0.076 and the mean d/h_c is 0.78.

Figura 6.1: Valori caratteristici di z_0 e di d . Da Garratt (1992).

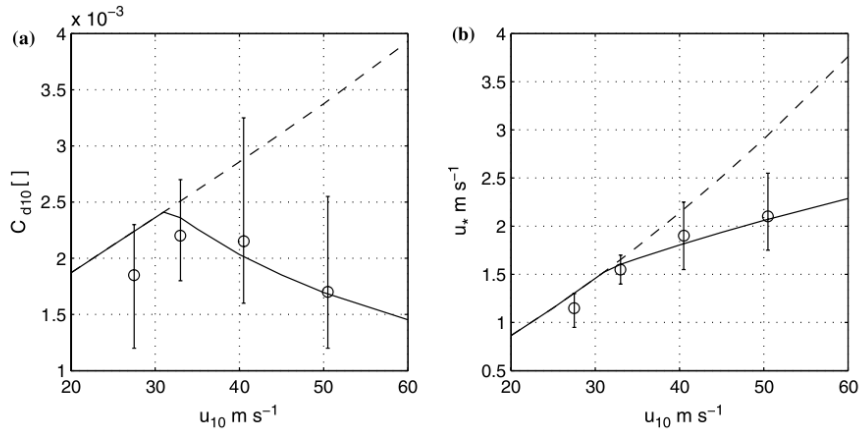


Figura 6.2: From Makin (2005).

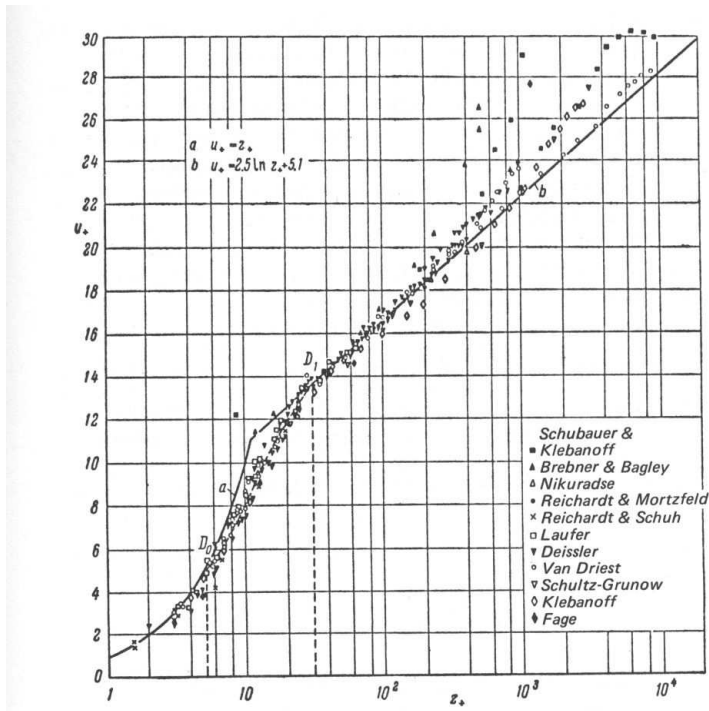


Figura 6.3: Profilo nondimensionale della velocità media presso una parete liscia. Da Monin and Yaglom (1971).

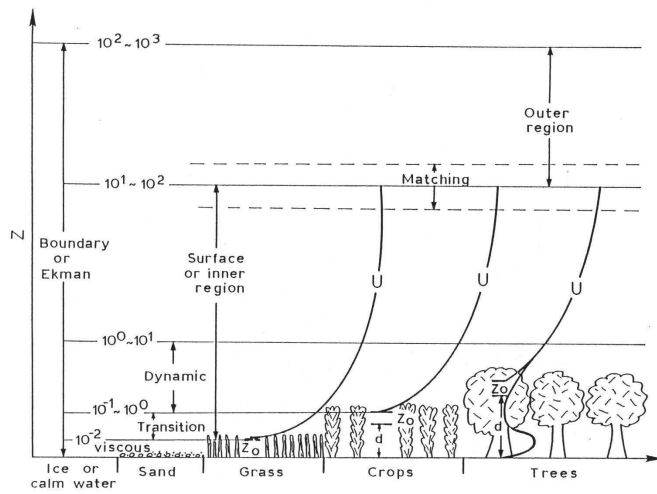


Figura 6.4: Rappresentazione schematica dello strato limite neutrale su diversi tipi di superficie. Da Trombetti and Tagliazucca (1994).

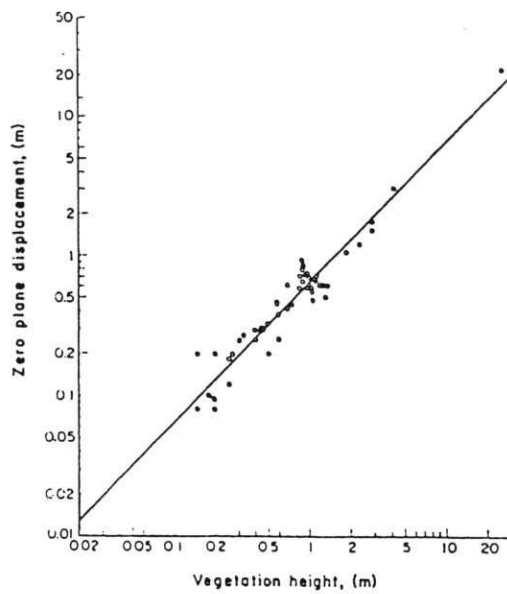


Figura 6.5: Relazione tra 'zero plane displacement' d e altezza della vegetazione h_0 , per diversi tipi di copertura del suolo: approssimativamente, $d \sim h_0/2$.

6.3.2 Momenti secondi, dissipazione, scale integrali

La varianza delle componenti della velocità, così come l'energia cinetica, è costante con la distanza dalla parete:

$$\overline{u_i'^2} = (a_i u_*')^2, \quad a_1 = 2.4, \quad a_2 = 1.8, \quad a_3 = 1.25 \quad (6.17)$$

dove i valori dei coefficienti sono empirici e denotano l'anisotropia della turbolenza nello strato superficiale.

Dall'equazione dell'energia cinetica turbolenta, Eq.6.3, si ha:

$$-\overline{u'w'} \frac{d\bar{u}}{dz} - \frac{dT}{dz} - \varepsilon = 0 \quad (6.18)$$

Su base dimensionale, $dT/dz = \alpha u_*'^3 / \kappa z$ e quindi si ottiene l'espressione della dissipazione nello strato limite neutrale:

$$\varepsilon = (1 - \alpha) \frac{u_*'^3}{\kappa z} \quad (6.19)$$

Se la turbolenza è omogenea in verticale, la divergenza dei momenti terzi è trascurabile: $\alpha = 0$; alcuni dati recenti (Albertson et al., 1997; Pahlow et al., 2001) indicano che la dissipazione ε è pari a circa $0.6 u_*'^3 / \kappa z$, equivalente a dire che la divergenza dei momenti terzi contribuisce in misura non trascurabile a bilanciare la produzione di energia cinetica dovuta allo 'shear'.

L'Eq. 4.22 indica che la dissipazione di energia cinetica è proporzionale al rapporto tra il quadrato della velocità di scala ed il tempo integrale. Dal confronto con la Eq. 6.19 si può stimare quindi una scala di tempo nello strato logaritmico:

$$T_i = \frac{L_i}{u_*'} = \frac{2\kappa a_i^2 z}{0.6 C_0 u_*'} \quad (6.20)$$

dove a_i è il rapporto tra la deviazione standard della componente i -esima della velocità e la velocità di attrito, ed è stato inserito il coefficiente empirico 0.6 discusso in precedenza.

Questa scala non è necessariamente uguale al tempo integrale calcolato attraverso la correlazione, ma ci aspettiamo che sia proporzionale ad esso. In vicinanza della superficie non ci si possono aspettare condizioni di isotropia per le scale integrali, come indicato dai diversi valori di a_i . Questa anisotropia si ritrova nei diversi valori assunti da T_i (mentre nel subrange inerziale avevamo un solo valore per la scala dei tempi).

Le scale delle lunghezze risultano:

$$L_i = \frac{2\kappa 0.6 a_i^2 z}{C_0} \quad (6.21)$$

dove il coefficiente della z varia da 0.5 per $i = 1$ a 0.125 per $i = 3$.

Una formulazione coerente per il coefficiente di scambio turbolento può essere ricavata dalla relazione flusso-gradiente $-\overline{u'w'} = K_m d\bar{u}/dz$:

$$K_m = \kappa u_*' z \quad (6.22)$$

Questo risultato puo' essere confrontato con l'Eq. 3.99, ponendo $\alpha^{1/2}\bar{l}^{1/2} = \kappa z$ e quindi suggerisce una possibile relazione tra la lunghezza di mescolamento $l = \alpha^{1/2}\bar{l}^{1/2}$ e le scale integrali L_i .

6.4 Lo strato di Ekman neutrale

Si e' visto come l'analisi di 'outer layer' fornisca una scala per l'altezza dello strato limite neutrale (Eq. 5.11). Per ottenere un profilo di velocita' media, l'analisi puo' essere sviluppata se si assume una relazione flusso-gradiente, per trasformare le eq. 5.7 e 5.8 in equazioni nelle variabili medie \bar{u} e \bar{v} .

L'ipotesi piu' semplice e' che il coefficiente di scambio turbolento sia una costante $K_m = K$:

$$\overline{u'_i w'} = -K \frac{d\bar{u}_i}{dz}, \quad i = 1, 2 \quad (6.23)$$

Le equazioni 5.7 e 5.8 diventano

$$f(\bar{v} - v_g) + K \frac{d^2\bar{u}}{dz^2} = 0 \quad (6.24)$$

$$-f(\bar{u} - u_g) + K \frac{d^2\bar{v}}{dz^2} = 0 \quad (6.25)$$

Si cerca la soluzione con

$$\bar{\mathbf{u}}(0) = 0 \quad (6.26)$$

e con

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{u}}(z) = \mathbf{u}_g \quad (6.27)$$

Il problema si risolve ponendo $V = \bar{u} + i\bar{v}$, $V_g = u_g + iv_g$. Le due equazioni 6.25 e 6.24 si riducono ad una equazione per la variabile complessa V :

$$K \frac{d^2V}{dz^2} - if(V - V_g) = 0 \quad (6.28)$$

la cui soluzione avra' la forma

$$V = a_1 \exp(b_1 z) + a_2 \exp(b_2 z) + V_g \quad (6.29)$$

dove, essendo $b_i^2 = if/K$:

$$b_{1,2} = \mp(1+i) \left(\frac{f}{2K} \right)^{1/2} \quad (6.30)$$

From Eq. 6.27 $a_2 = 0$. Rimane

$$V = a_1 \exp\left(-\left(\frac{f}{2K}\right)^{1/2} z\right) \left[\cos\left(\left(\frac{f}{2K}\right)^{1/2} z\right) - i \sin\left(\left(\frac{f}{2K}\right)^{1/2} z\right) \right] + V_g \quad (6.31)$$

e per la 6.26

$$a_1 = -V_g \quad (6.32)$$

La parte reale di V fornisce la soluzione per \bar{u} , la parte immaginaria per \bar{v} . Pertanto:

$$\begin{aligned} \bar{u} = u_g \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{f}{2K}\right)^{1/2} z\right) \cos\left(\left(\frac{f}{2K}\right)^{1/2} z\right) \right] \\ - v_g \exp\left(-\left(\frac{f}{2K}\right)^{1/2} z\right) \sin\left(\left(\frac{f}{2K}\right)^{1/2} z\right) \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} \bar{v} = v_g \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{f}{2K}\right)^{1/2} z\right) \cos\left(\left(\frac{f}{2K}\right)^{1/2} z\right) \right] \\ + u_g \exp\left(-\left(\frac{f}{2K}\right)^{1/2} z\right) \sin\left(\left(\frac{f}{2K}\right)^{1/2} z\right) \end{aligned} \quad (6.34)$$

Al suolo si ha:

$$\frac{d\bar{u}}{dz}\Big|_{z=0} = \left(\frac{f}{2K}\right)^{1/2} (u_g - v_g) \quad (6.35)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dz}\Big|_{z=0} = \left(\frac{f}{2K}\right)^{1/2} (u_g + v_g) \quad (6.36)$$

Si orientino gli assi in modo tale che $v_g = 0$: si ottiene

$$\frac{d\bar{u}}{dz}\Big|_{z=0} = \frac{d\bar{v}}{dz}\Big|_{z=0} = u_g \left(\frac{f}{2K}\right)^{1/2} \quad (6.37)$$

e dunque la velocita' media a bassa quota e' ruotata di $\pi/4$ (anticlockwise) rispetto alla direzione del vento geostrofico (nell'emisfero nord).

Dalla eq. 6.23 si puo' stimare u_*

$$u_*^2 \equiv (\overline{u'w'^2} + \overline{v'w'^2})^{1/2} = (Kf)^{1/2} (u_g^2 + v_g^2)^{1/2} \quad (6.38)$$

e dalla eq. 6.33 si puo' stimare che l'altezza dello strato limite (la quota a cui il vento coincide con quello geostrofico) sia per esempio circa $2\left(\frac{f}{2K}\right)^{-1/2}$. La Fig. 5.1 suggerisce che tale altezza sia approssimativamente $0.2u_*/f$. Pertanto si ottiene una stima per il coefficiente (costante rispetto alla quota) K

$$K = \frac{10^{-2} u_*^2}{2 f} \quad (6.39)$$

e, per consistenza,

$$u_* = \frac{10^{-1}}{\sqrt{2}} (u_g^2 + v_g^2)^{1/2} \quad (6.40)$$

Questa soluzione e' rappresentata, in termini nondimensionali, nelle figure 6.6, 6.7, 6.8: profili verticali di velocita' media, spirale di Ekman, flussi verticali di quantita' di moto. Si noti che la scala della velocita' e' u_* , quella dei flussi u_*^2 , quella delle altezze u_*/f , quella del coefficiente di diffusione u_*^2/f .

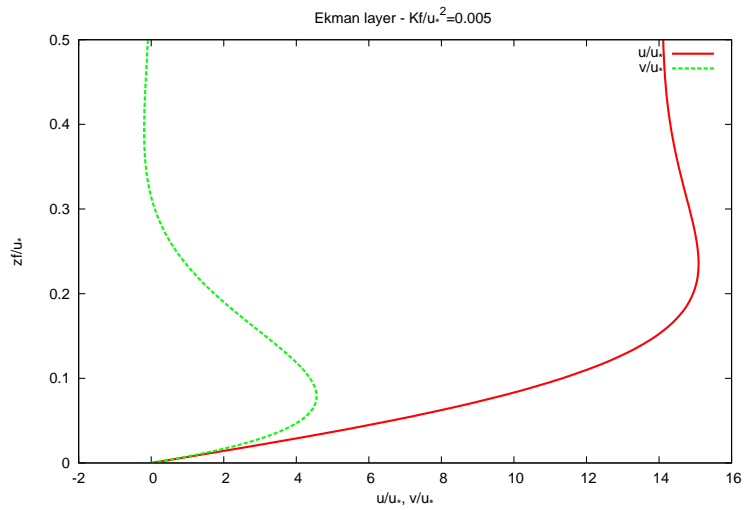


Figura 6.6: Profili di $\overline{u_i}/u_*$ in funzione della quota zf/u_* .

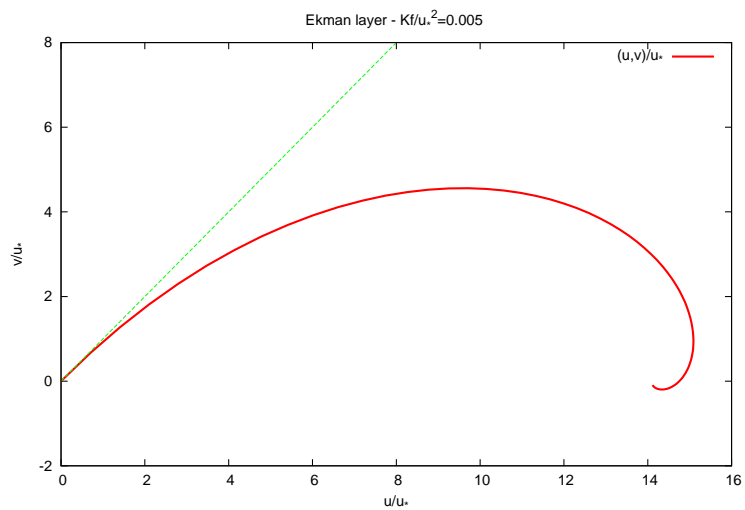


Figura 6.7: Spirale di Ekman. Presso il suolo $\overline{u_1} = \overline{u_2}$.

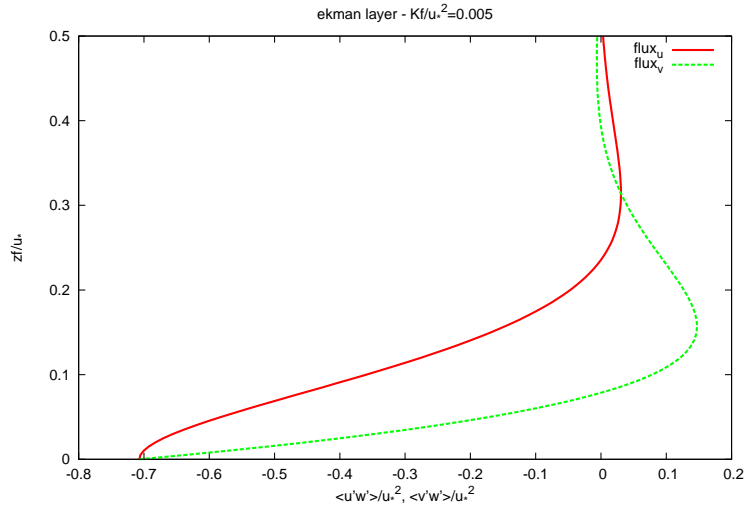


Figura 6.8: Flussi verticali di quantita' di moto, normalizzati al flusso al suolo.

6.5 Condizioni (debolmente) stratificate

6.5.1 Profili di velocita' e temperatura medi

Usando l'analisi dimensionale si puo' scrivere il gradiente di velocita' analogamente al caso neutrale (Eq. 6.11), esprimendo lo scostamento dalla forma neutrale in funzione del numero di Richardson:

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} \Phi_M(\mathcal{R}_f) \quad (6.41)$$

con la condizione $\Phi_M(0) = 1$. Si ricorda che questa analisi si riferisce allo strato superficiale, dove i flussi sono costanti, indipendentemente dagli effetti della stratificazione (ma si puo' presumere che lo spessore dello strato superficiale non si mantenga costante in differenti condizioni di stabilita').

Nell'ipotesi che le quantita' caratteristiche del moto turbolento (per esempio, il profilo di velocita' media, o di temperatura media) siano definite in termini globali (cioe' possono definirsi scale appropriate, analogamente a u_* introdotta nel caso neutrale), tali quantita' debbono dipendere dai valori costanti dei flussi verticali di momento e di calore, e anche dalla distanza dalla superficie (Monin and Yaglom, 1971, pag. 427). La lunghezza di Obukhov L_{MO} (Obukhov, 1946) puo' essere definita come:

$$L_{MO} = -\frac{u_*^3}{\kappa g w' \vartheta' |_0 / \vartheta_{00}} \quad (6.42)$$

La lunghezza di Obukhov e' tale per cui:

- $L_{MO} < 0$: strato limite instabile

- $L_{MO} > 0$: strato limite stabile
- $|L_{MO}| \rightarrow \infty$: strato limite neutrale

Si noti che piccoli valori di $|L_{MO}|$ indicano la prevalenza del flusso di calore su quello di quantita' di moto; viceversa per grandi valori. In generale si puo' dire che a quote dell'ordine di $|L_{MO}|$ gli effetti del flusso di calore si bilanciano con quelli di tipo meccanico. A quote molto minori, la produzione di energia cinetica turbolenta da 'shear' e' dominante (cio' che sempre accade presso il suolo). Per quote maggiori, se il flusso termico e' positivo, si instaurano le condizioni di convezione libera mentre, se il flusso e' negativo, si instaura uno strato limite stabile in cui la turbolenza puo' non essere completamente sviluppata.

L'equazione per l'energia cinetica turbolenta puo' essere resa nondimensionale dividendo per $u_*^3/\kappa z$: nel caso attuale (stazionario, orizzontalmente omogeneo) si ha:

$$0 = \Phi_m - \frac{z}{L_{MO}} - \kappa z \frac{d(\mathcal{T}/u_*^3)}{dz} - \Phi_\varepsilon \quad (6.43)$$

dove si definisce

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} \Phi_m \quad (6.44)$$

e

$$\varepsilon = \frac{u_*^3}{\kappa z} \Phi_\varepsilon \quad (6.45)$$

L'eq. 6.43 suggerisce che Φ_m e Φ_ε possano essere scritti come funzione solo di z/L_{MO} .

Per $z \ll |L_{MO}|$, si puo' scrivere uno sviluppo in serie di potenze di $\zeta = z/L_{MO}$ (e quindi le espressioni che ne discendono sono valide per $|z/L_{MO}| \ll 1$):

$$\Phi_m(\zeta) = 1 + \alpha_m \zeta + \mathcal{O}(\zeta)^2 \quad (6.46)$$

ed integrare il profilo di velocita' 6.44, fornendo la relazione log-lineare:

$$\bar{u}(z) \cong \frac{u_*}{\kappa} \left(\ln \frac{z}{z_0} + \alpha_m \frac{z - z_0}{L_{MO}} \right) \quad (6.47)$$

con $\alpha_m = 4.8$ secondo Dyer (1974), = 6 secondo Businger et al. (1971); these values are derived from stable data analysis (see later).

L' Eq. 6.2 mostra che il flusso di calore e' costante con la quota. Pertanto si puo' definire una temperatura di scala (che nel caso neutro e' nulla):

$$\vartheta_* = \frac{\overline{w'\vartheta'}}{u_*} \quad (6.48)$$

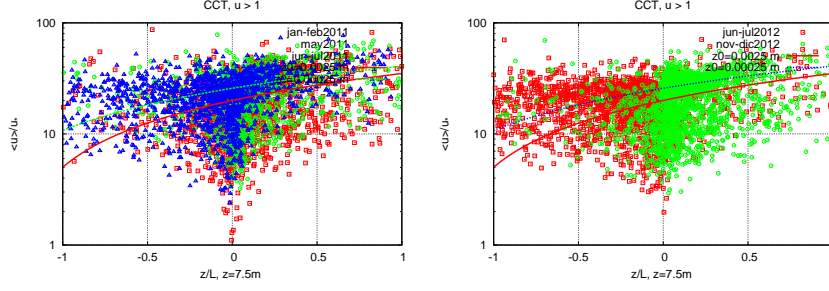


Figura 6.9: Profili nondimensionali di vento in funzione di z/L_{MO} , da dati CCT. Le curve rappresentano la relazione (6.46) con $z_0 = 0.00025m$ e $z_0 = 0.0025m$ e $\alpha_m = 6$.

Analogamente a quanto fatto per l'energia cinetica, si puo' scrivere l'equazione per la varianza della temperatura, Eq. 3.86, in forma nondimensionale dividendo per $u_*\vartheta_*^2/\kappa z$. Nel caso stazionario e orizzontalmente omogeneo risulta:

$$0 = \Phi_h - \frac{\kappa z}{2u_*\vartheta_*^2} \frac{d\overline{w'\vartheta'^2}}{dz} - \Phi_{\varepsilon\vartheta} \quad (6.49)$$

dove si definisce il gradiente verticale di temperatura media:

$$\frac{d\overline{\vartheta}}{dz} = -\frac{\vartheta_*}{\kappa z} \Phi_h(\zeta) \quad (6.50)$$

e la dissipazione di varianza della temperatura

$$\varepsilon_{\vartheta} = \frac{u_*\vartheta_*^2}{\kappa z} \Phi_{\varepsilon\vartheta} \quad (6.51)$$

Φ_h puo' essere espresso in serie di potenze di ζ :

$$\Phi_h = \alpha_{h0} + \alpha_{h1}\zeta \quad (6.52)$$

I dati suggeriscono che $\Phi_h(0) < 1$ ovvero $\alpha_{h0} = 0.95$ e $\alpha_{h1} = 4.5$ (Dyer, 1974). Si noti che $\vartheta_* = 0$ se $\zeta = 0$. Si noti anche che $\alpha_{h0} \neq 1$ equivale a dire che il valore della costante di von Karman e' diverso per velocita' e temperatura (vedi per esempio Zilitinkevich and Esau, 2007): si ha $\kappa_h = \kappa/\alpha_{h0}$ e $\Phi_h = 1 + \alpha_{h1}/\alpha_{h0}\zeta$

6.5.2 Momenti secondi

Definisco in generale i momenti di ordine n per componenti della velocita' e per la temperatura:

The nondimensional n -th order moments are defined as:

$$\overline{u_i^n} = u_*^n \Phi_i^{(n)}(\zeta, \xi) \quad (6.53)$$

$$\overline{\vartheta^n} = \vartheta_*^n \Phi_{\vartheta}^{(n)}(\zeta, \xi) \quad (6.54)$$

Tabella 6.1: $\overline{u_i^2}/u_*^2$ from ARTOV data. Mean values.

$i = 1$	9.7 ± 0.8
$i = 2$	7.3 ± 0.3
$i = 3$	1.31 ± 0.03

Tabella 6.2: $\overline{u_i'^2}/u_*^2$ from ARTOV data. Quadratic fit $a + b\zeta + c\zeta^2$

	a	b	c
$i = 1$	9.2 ± 0.3	0	16 ± 3
$i = 2$	8.2 ± 0.5	0	37 ± 6
$i = 3$	1.32 ± 0.02	-0.31 ± 0.07	2.8 ± 0.2

where $\xi = z/h$, the height normalised over the boundary layer height. In the surface layer, the dependence on ξ must disappear.

Dati di varianza delle diverse componenti della velocità sono riportate in Fig. 6.10 nel caso quasi neutrale (dati di Roma Tor Vergata). Sono presentati i valori medi in un intorno $-0.05 < \zeta < 0.05$ della neutralità, e i fit lineare e quadratico. Si osserva che il fit lineare restituisce approssimativamente il valore medio, mentre il fit quadratico evidenzia la crescita della varianza allontanandosi dalla neutralità.

La dipendenza dalla quota è stata studiata sperimentalmente. For the vertical velocity component, in near neutral conditions, Smedman (1991), Högström et al. (2002) suggest that the vertical velocity variance depends on the height of the boundary layer (estimated to be $h \simeq 0.3u_*/f$) as follows:

$$\Phi_3^{(2)} = 1.0 + \left(\frac{z}{0.03h}\right)^{2/3} \simeq 1 + 10.4\xi^{2/3}; \quad h = 0.3\frac{u_*}{f}; \quad |\zeta| \ll 1 \quad (6.55)$$

which is verified for $\xi < .03$ (their Fig. 2).

6.5.3 Stime del coefficiente di diffusione turbolenta

Il coefficiente di scambio turbolento per la quantità di moto può essere valutato in maniera analoga al caso neutrale, eq. 6.22; si ottiene:

$$K_m = \frac{\kappa u_* z}{\Phi_m(\zeta)} \quad (6.56)$$

Nel caso stabile, poiché Φ_m cresce con ζ , e quindi a parità di quota z il gradiente nondimensionale cresce al diminuire di L_{MO} , il coefficiente di scambio turbolento cala al diminuire di L_{MO} : la stabilità riduce gli scambi in verticale. Un ragionamento analogo porta ad osservare che nel caso instabile il coefficiente di scambio aumenta.

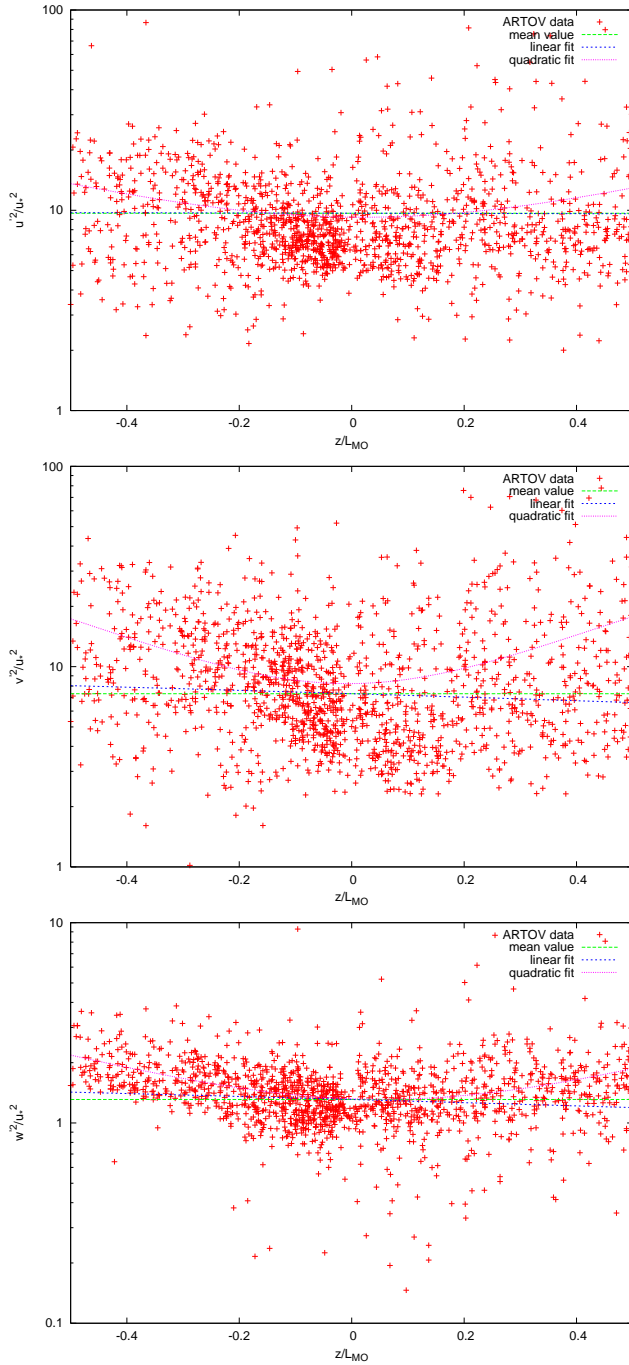


Figura 6.10: Varianza normalizzata delle tre componenti della velocita' per situazioni quasi neutrale. Da dati Roma Tor Vergata.

Confrontando le espressioni 6.5 e 6.42 si ottiene una semplice relazione tra \mathcal{R}_f e L_{MO} per lo strato superficiale:

$$\mathcal{R}_f = \zeta \Phi_m(\zeta)^{-1} \quad (6.57)$$

Dunque nello strato superficiale $\mathcal{R}_f \simeq \zeta(1 - \alpha\zeta)$ e' variabile, e cresce in valore assoluto con la quota (ci ricorda che vicino al suolo prevale la produzione meccanica di turbolenza). Si puo' scrivere il coefficiente di scambio turbolento come:

$$K_m = \kappa u_* L_{MO} \mathcal{R}_f \simeq (\kappa u_* z) (1 - \alpha\zeta) \quad (6.58)$$

espressione che conferma il risultato precedente, che in condizioni stabili il coefficiente di scambio e' piu' piccolo del caso neutrale, mentre in condizioni debolmente instabili e' piu' grande.

Analogamente per il flusso di calore:

$$\overline{w'\vartheta'} = -K_h \frac{d\bar{\vartheta}}{dz} \quad (6.59)$$

$$u_* \vartheta_* = K_h \frac{\vartheta_*}{\kappa z} \Phi_h \quad (6.60)$$

da cui

$$K_h = \kappa u_* z \Phi_h^{-1} \quad (6.61)$$

Con i valori riportati sopra, $\Phi_h(0) = 0.95$ e $\Phi_m(0) = 1$ e quindi il numero di Prandtl turbolento (rapporto tra il coefficiente di scambio per la quantita' di moto e quello per il calore) risulta inferiore a 1 in condizioni quasi neutrale.

Using Eqs. 3.99 $K_m = l^2 d\bar{u}/dz$ and 6.56 $K_m = \kappa u_* z \Phi_m^{-1}$ it is possible to obtain an expression for the mixing length l :

$$l = \kappa z \Phi_m^{-1} = \frac{\kappa z}{1 + \alpha_m z/L_{MO}} \quad (6.62)$$

or

$$l^{-1} = \frac{1}{\kappa z} + \frac{\alpha_m}{\kappa L_{MO}} \quad (6.63)$$

which shows that for small stability the mixing length is dominated by the neutral form and depends on the distance from the ground, and for large stability depends on the Obukhov length but not on the distance from the ground.

Capitolo 7

Lo strato limite convettivo (CBL)

7.1 Introduzione

Lo strato limite convettivo ('convective boundary layer', CBL) e' caratterizzato da turbolenza generata da effetti termici (riscaldamento del suolo); i vortici si sviluppano in verticale; il mescolamento tra correnti ascendenti e discendenti e tra interno del CBL (alla sommita') e la troposfera libera e' dovuto in larga misura al meccanismo di 'entrainment'.

Qualitativamente si individuano i seguenti strati:

- lo strato superficiale, che comprende non piu' del 10 per cento dello spessore totale del CBL, sostanzialmente influenzato dall'interazione anche meccanica con il suolo;
- la parte centrale del CBL, ben mescolata: di solito compresa tra il 50 e l' 80 per cento dello spessore totale, e' sostanzialmente dominata dalla convezione;
- la sommita', tra il 10 e il 40 per cento dello spessore totale, dove sono localizzati i fenomeni di mescolamento piu' intensi con l'aria sovrastante.

Una descrizione qualitativa della turbolenza nel CBL si ricava da misure (vedi p. es. Hunt et al., 1988) e da simulazioni numeriche, principalmente LES (p.es. Moeng and Sullivan, 1994): il galleggiamento prodotto al suolo, dove la radiazione incidente ad onda corta viene assorbita e si riscalda l'aria, da' luogo allo sviluppo di bolle di aria calda e meno densa dell'ambiente circostante, distribuite casualmente alla superficie. Le bolle si auto-organizzano in pennacchi, trasportando aria calda verso l'alto ('updraft'); i pennacchi tendono ad allargarsi con la quota e a fondersi tra di loro. Per mantenere la continuita', moti discendenti piu' lenti ('downdraft') trasportano dall'alto aria piu' fredda.

La Fig. 7.2, basata su risultati di LES, mostra i grandi e coerenti vortici che coinvolgono quasi tutto lo spessore del CBL, in accordo qualitativo con

le osservazioni sodar: Fig. 7.1. La Fig. 7.3 descrive qualitativamente tale struttura.

7.2 La funzione densita' di probabilita' (*pdf*) della velocita'

L'andamento schematico della *pdf* per la velocita' verticale e' riportato in Fig. 7.4. Correnti ascendenti e discendenti sono caratterizzate da valori modali positivi e negativi, rispettivamente; e' presente (attorno allo zero) turbolenza di piccola scala di produzione meccanica (vicino al suolo, e/o dovuta allo 'shear' al bordo delle correnti). In figura sono anche mostrate alcune distribuzioni di probabilita' della velocita' verticale a differenti distanze dal suolo. Vicino al terreno la *pdf* e' quasi simmetrica, mentre a quote piu' elevate il valore modale diventa negativo e la varianza cresce. La skewness della distribuzione e' positiva, e la kurtosis e' maggiore di 3 (cfr. Fig. 4.8).

7.3 Analisi dimensionale direzionale e profili medi di velocita' e temperatura

L'analisi dimensionale standard non si presta bene allo studio del CBL. Kader and Yaglom (1990) hanno mostrato che le scale orizzontale e verticale (rispettivamente L_x e L_z) devono essere considerate diverse tra loro se si vuole svolgere un'analisi corretta. Nello strato limite quasi neutrale il profilo logaritmico fornisce, per il vento medio (Eq. 6.12):

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} \quad (7.1)$$

Siccome $[u] = L_x T^{-1}$ e $[u_*] = L_x^{1/2} L_z^{1/2} T^{-1}$, dall'Eq. 7.1 si ottiene $L_z/L_x = \kappa^2 \approx 0.16$, per cui $L_z \ll L_x$ nei pressi del suolo, cioe' nello strato limite logaritmico.

Ancora, si considerino le equazioni per le varianze delle singole componenti della velocita', che si possono ricavare dalla Eq. 3.68. Scritte per il caso stazionario, su terreno piatto e in condizioni di omogeneita' orizzontale, si ha:

$$0 = -2\overline{u'w'} \frac{d\bar{u}}{dz} - \frac{d\mathcal{T}_u}{dz} - \frac{2}{3}\varepsilon \quad (7.2)$$

$$0 = -\frac{d\mathcal{T}_v}{dz} - \frac{2}{3}\varepsilon \quad (7.3)$$

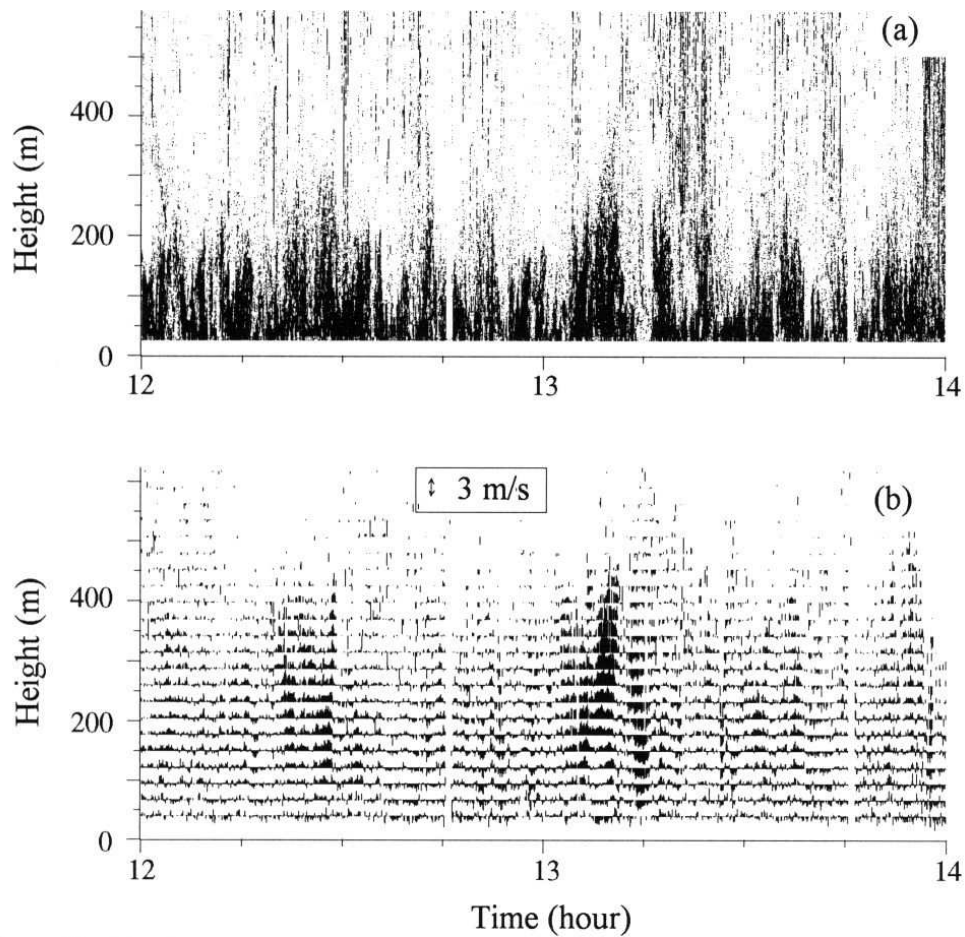


Figura 7.1: Fac-simile dell'eco SODAR per uno strato limite convettivo: il suolo riscalda l'aria sovrastante (Argentini et al., 1996). Sono evidenti strutture coerenti in verticale e variabili nel tempo. La parte inferiore della figura mostra la stima delle velocità verticali istantanee alle diverse quote, rafforzando l'immagine di uno strato caratterizzato da moti relativamente coerenti in verticale e variabili nel tempo.

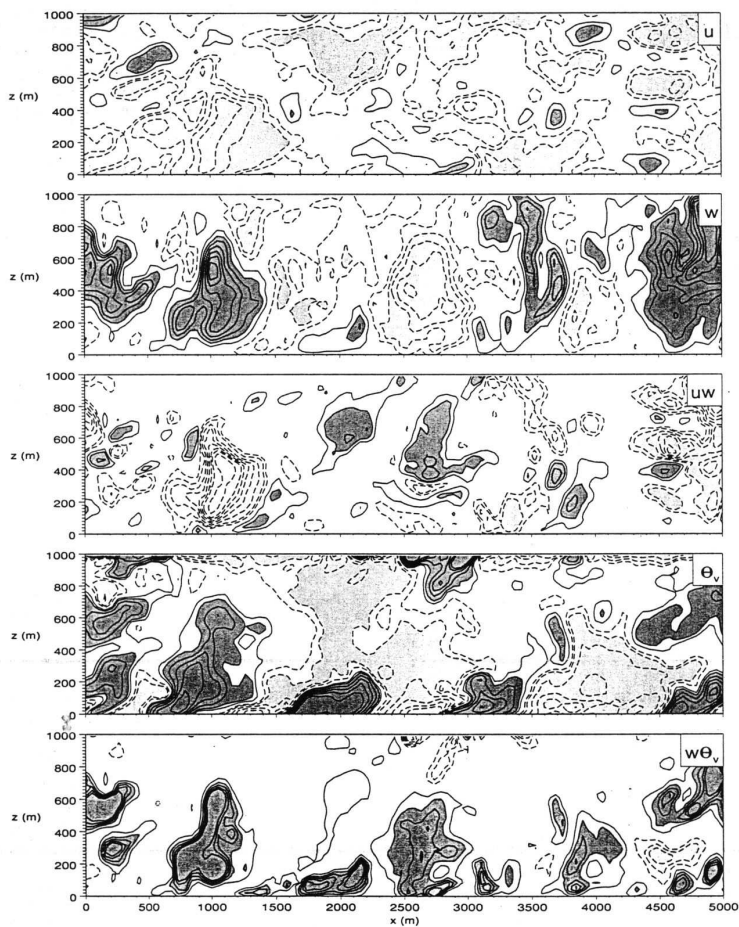


Figura 7.2: Rappresentazione di alcune variabili del flusso (in particolare, notare la velocità verticale, seconda dall'alto) ottenute da Large Eddy Simulation (Moeng and Sullivan, 1994). Si ritrovano le strutture coerenti, estese in verticale.

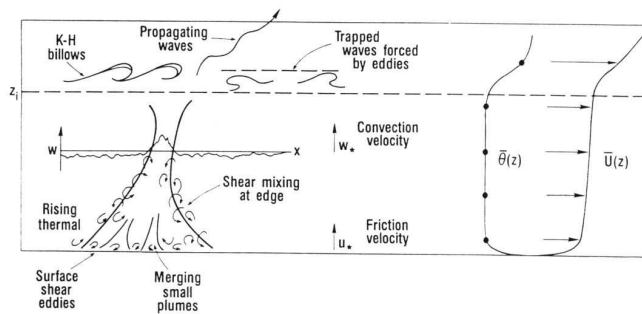
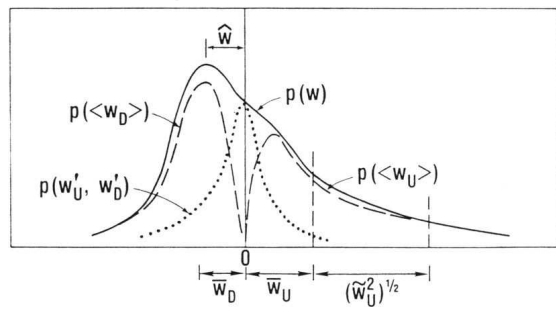
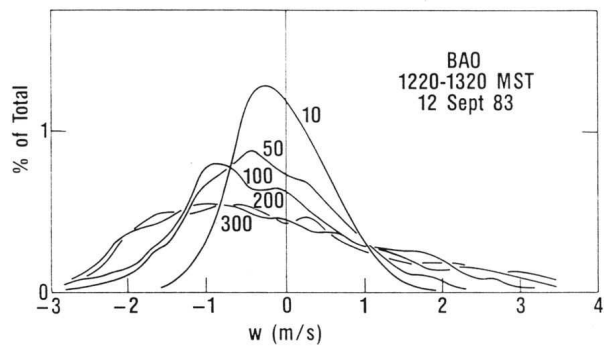


Figura 7.3: Rappresentazione schematica dello strato limite convettivo (Hunt et al., 1988).



(a)



(b)

Figura 7.4: *pdf* della velocità verticale: schema per illustrare correnti ascendenti e discendenti (sopra) e forme schematiche a diverse quote (sotto) che mettono in evidenza la crescente importanza del momento terzo con la quota (Hunt et al., 1988).

$$0 = 2 \frac{g}{\vartheta_{00}} \overline{w' \vartheta'} - \frac{d\mathcal{T}_w}{dz} - \frac{2}{3} \varepsilon \quad (7.4)$$

Mentre l'equazione per l'energia cinetica Eq. 6.4 indica che flussi di quantità di moto e di calore entrano contemporaneamente nel bilancio, queste equazioni mostrano che la componente u è dominata dal termine di produzione da shear, mentre la w è dominata dal termine di flusso di calore. (I termini tripli \mathcal{T}_i rappresentano una redistribuzione, anche sulle diverse componenti.) La lettura che ne consegue è che le scale per le velocità possano essere diverse a seconda della componente, e a seconda della regione di flusso indagata.

Lo schema concettuale proposto da Kader and Yaglom (1990) può essere sintetizzato così:

- per $z \ll -L_{MO}$ la produzione di energia cinetica turbolenta è dominata dal termine di shear: la velocità di scala è u_* e la temperatura di scala ϑ_* . Kader and Yaglom (1990) definiscono una nuova lunghezza,

$$L_{KY} = -\kappa L_{MO} \quad (7.5)$$

In questo strato, detto strato dinamico, si assume che valga la relazione 7.1 per la velocità media e la relazione 6.50 per la temperatura media.

- per $L_{KY} < z < -L_{MO}$ le forze di galleggiamento diventano importanti nella produzione di fluttuazioni della velocità verticale, ma le componenti orizzontali sono ancora di origine meccanica (prodotte da 'shear'). Si può definire questo strato di transizione come strato dinamico-convettivo, dove le componenti orizzontale e verticale del vettore velocità risultano essere disaccoppiate dal punto di vista energetico. Si deve definire per tale strato una scala di velocità verticale di dimensione $L_z T^{-1}$, ed una di velocità orizzontale con $L_x T^{-1}$. Si possono definire tali scale come:

$$w_* = \left(\frac{g}{\vartheta_{00}} \overline{w' \vartheta'}|_0 z \right)^{1/3} \quad (7.6)$$

$$u_{**} = \frac{u_*^2}{w_*} = u_*^2 \left(\frac{g}{\vartheta_{00}} \overline{w' \vartheta'}|_0 z \right)^{-1/3} \quad (7.7)$$

Ne consegue che una temperatura di scala è:

$$\vartheta_{**} = \frac{\overline{w' \vartheta'}|_0}{w_*} \quad (7.8)$$

Questo porta a definire i gradienti medi di velocità e temperatura nel sottostrato dinamico-convettivo

$$\frac{d\bar{u}}{dz} \approx \frac{u_{**}}{z} = u_*^2 (g/\vartheta_{00} \overline{w' \vartheta'}|_0)^{-1/3} z^{-4/3} \quad (7.9)$$

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{dz} \approx -\frac{\vartheta_{**}}{z} = -(g/\vartheta_{00})^{-1/3} (\overline{w' \vartheta'}|_0)^{2/3} z^{-4/3} \quad (7.10)$$

- per altezze ancora maggiori $z > -L_{MO}$, la produzione di energia dovuta agli effetti dinamici diventa trascurabile (così u_* non è più un parametro di rilievo). L'unica scala di velocità è w_* e la scala di temperatura è ϑ_{**} : questo è lo strato di convezione libera. In questo strato si ha:

$$\frac{d\bar{u}}{dz} \approx \frac{w_*}{z} = (g/\vartheta_{00}\overline{w'\vartheta'})^{1/3} z^{-2/3} \quad (7.11)$$

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{dz} \approx -\frac{\vartheta_{**}}{z} = -(g/\vartheta_{00})^{-1/3}(\overline{w'\vartheta'})^{2/3} z^{-4/3} \quad (7.12)$$

(si noti che il gradiente di temperatura dipende dalle stesse variabili dello strato precedente, ma ci si può aspettare che il coefficiente di proporzionalità sia diverso).

La Fig. 7.5 mette in evidenza i tre sottostrati e fornisce stime per i valori delle costanti di proporzionalità.

Se si utilizza la definizione $W_* = w_*(h)$ si ottiene:

$$\frac{-L_{MO}}{h} = \frac{u_*^3}{\kappa W_*^3} \quad (7.13)$$

Si nota che i flussi utilizzati in queste valutazioni sono i flussi misurati al suolo: questo corrisponde all'idea che lo strato limite convettivo è determinato principalmente dalle condizioni presso il suolo.

7.4 I momenti delle componenti della velocità e della temperatura.

7.4.1 Nondimensional gradient of mean velocity

Kader and Yaglom (1990) derive the following form for the nondimensional gradient of the mean horizontal velocity (unstable cases: $\zeta < 0$; the surface layer: $z \ll h$):

$$\Phi_m = 1 \text{ for } -\zeta < \alpha_{m1}^3 \kappa^4 \simeq 0.13 \quad (7.14)$$

$$\Phi_m = \alpha_{m1} \kappa^{2/3} (-\zeta)^{-1/3} \text{ for } \alpha_{m1}^3 \kappa^2 < -\zeta < \kappa \left(\frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{m2}} \right)^{3/2} \quad (7.15)$$

$$\Phi_m = \alpha_{m2} \kappa^{2/3} (-\zeta)^{1/3} \text{ for } -\zeta > \kappa \left(\frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{m2}} \right)^{3/2} \simeq 1.5 \quad (7.16)$$

where $\alpha_{m1} = 1.7$, $\alpha_{m2} = 0.7$.

Högström (1996) observed that the spread of the data is quite large. He suggested:

$$\Phi_m = (1 - \beta_m \zeta)^{-1/4} \text{ for } \zeta > -2 \quad (7.17)$$

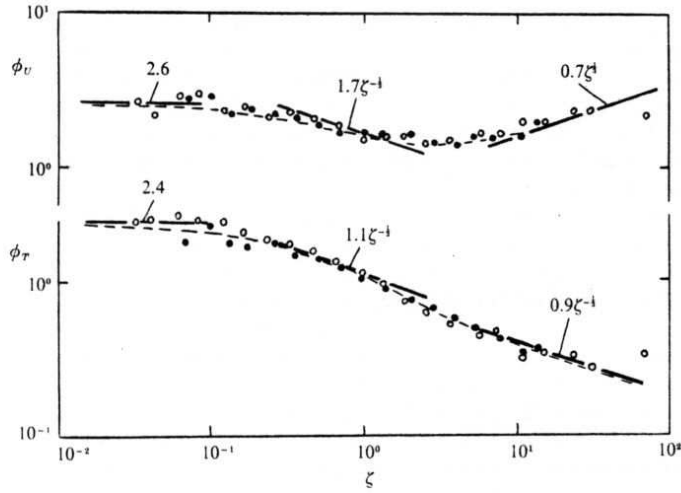


Figura 7.5: Gradienti nondimensionali di velocità media Φ_m e di temperatura media Φ_h per la parte inferiore dello strato limite convettivo, in funzione della quota nondimensionale $\zeta = z/L_{KY}$ (da Kader and Yaglom, 1990). Notare che nella figura i gradienti (riportati in ordinate) sono pari a Φ/κ nella notazione attuale.

where $\beta_m = 19$.

The original Kader and Yaglom (1990) figure is reported as Fig. 7.5. Fig. 7.6 reproduces the original figure from Högström (1996) showing data that disagree with Kader and Yaglom (1990) theory.

Frenzen and Vogel (2001) suggested (from analysis of observations) the following function

$$\Phi_m = (1 - \gamma_m \zeta)^{-1/3} \text{ for } \zeta > -0.5 \quad (7.18)$$

where $\gamma_m = 16$. This formula shows the same behaviour as in Eqs. 7.14 and 7.15.

7.4.2 Nondimensional gradient of mean temperature

For the mean temperature, in unstable cases, again adapted from Kader and Yaglom (1990):

$$\Phi_h = \alpha_{h0} \text{ for } 0 < -\zeta < (\alpha_{h1}/\alpha_{h0})^3 \kappa^4 \simeq 0.03 \quad (7.19)$$

$$\Phi_h = \alpha_{h1} \kappa^{4/3} (-\zeta)^{-1/3} \text{ for } -\zeta > (\alpha_{h1}/\alpha_{h0})^3 \kappa^4 \quad (7.20)$$

where $\alpha_{h0} = 0.95$, $\alpha_{h1} = 1.0$.

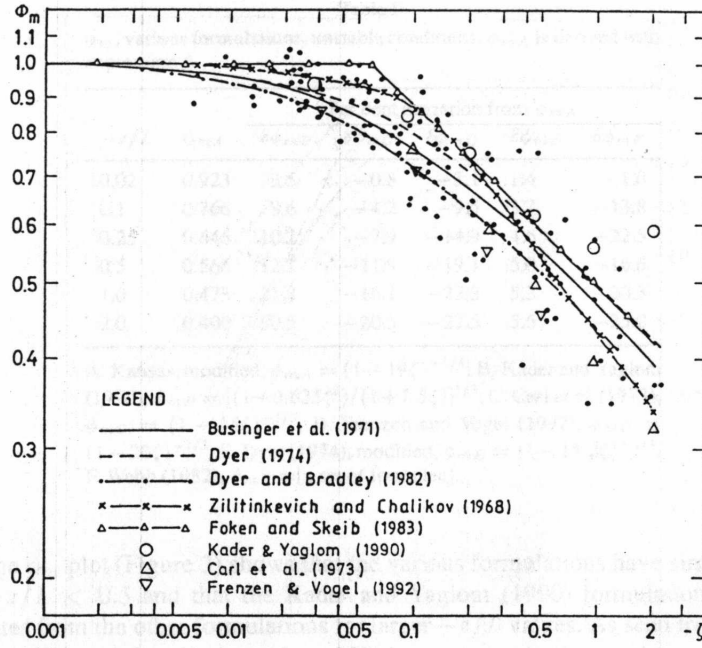


Figura 7.6: Φ_m as function of ζ from Högström (1996) .

Högström (1996) recommends an empirical power law:

$$\Phi_h = \alpha_{h0} (1 - \beta_h \zeta)^{-1/2} \quad \text{for } \zeta > -2 \quad (7.21)$$

where $\beta_h = 11.6$. Wyngaard et al. (1971) use the same form, with $\alpha_{h0} = 0.74$ and $\beta_h = 9.0$.

7.4.3 I momenti di ordine due: varianze di velocita' e temperatura

- nello strato dinamico, la scala della velocita' e' u_* e quella della temperatura ϑ_* , quindi $\Phi_i^{(n)}$ e $\Phi_\vartheta^{(n)}$ sono costanti
- nello strato di convezione libera le scale sono $w_*(z)$ e ϑ_{**} , quindi

$$\Phi_i^{(n)} \propto (-\zeta)^{n/3} \quad (7.22)$$

$$\Phi_\vartheta^{(n)} \propto (-\zeta)^{-n/3} \quad (7.23)$$

- if z is not much less the boundary layer height h the similarity function must depend also on h (not only on L_{MO}). According to Yaglom (1994) which takes into account ideas about unactive motion and decoupling of horizontal and vertical velocity at small wavenumbers, the similarity

function in Eq. 7.22 reads, in the free convection regime $-\zeta \gg 1$ and for $z < h$:

$$\Phi_i^{(2)} \simeq b_i^{(0)} (-h/L_{MO})^{2/3} + b_i (-z/L_{MO})^{2/3} \quad (7.24)$$

Eq. 7.24 reads also:

$$\frac{\overline{u_i'^2}}{w_*^2(z)} \simeq b_i^{(0)} \kappa^{2/3} \xi^{-2/3} + b_i \kappa^{2/3} \quad (7.25)$$

or

$$\frac{\overline{u_i'^2}}{w_*^2(h)} \simeq b_i^{(0)} \kappa^{2/3} + b_i \kappa^{2/3} \xi^{2/3} \quad (7.26)$$

Similarly, for the temperature variance in free convection conditions Yaglom (1994) gives:

$$\Phi_\vartheta^{(2)} \simeq b_\vartheta^{(0)} (-h/L_{MO})^{-2/3} + b_\vartheta (-z/L_{MO})^{-2/3} \quad (7.27)$$

Eq. 7.27 reads also:

$$\frac{\overline{\vartheta'^2}}{\vartheta_{**}^2(z)} \simeq \frac{b_\vartheta^{(0)}}{\kappa^{2/3}} \xi^{2/3} + \frac{b_\vartheta}{\kappa^{2/3}} \quad (7.28)$$

or

$$\frac{\overline{\vartheta'^2}}{\vartheta_{**}^2(h)} \simeq \frac{b_\vartheta^{(0)}}{\kappa^{2/3}} + \frac{b_\vartheta}{\kappa^{2/3}} \xi^{-2/3} \quad (7.29)$$

- trascurando i dettagli dello strato superficiale, in letteratura sono state presentate alcune relazioni rappresentative di tutto lo strato convettivo $0 < \xi < 1$. Strunin et al. (2004) (see also Sorbjan, 1991) for the variance of the horizontal streamwise velocity component gives:

$$\frac{\overline{u_1'^2}}{w_*^2(h)} = 1.4 \xi^{4/3} (1 - 0.7\xi)^{2/3} + 0.05 \xi^{-2/3} (1 - 0.8\xi)^{2/3} \quad (7.30)$$

and for the vertical component Lenschow et al. (1980) suggests:

$$\frac{\overline{u_3'^2}}{w_*^2(h)} = 1.8 \xi^{2/3} (1 - 0.8\xi)^2 \quad (7.31)$$

From Strunin et al. (2004):

$$\frac{\overline{\vartheta'^2}}{\vartheta_{**}^2(h)} = 1.8 \xi^{-2/3} (1 - \xi)^{4/3} + 1.4 \xi^{4/3} (1 - \xi)^{-2/3} \quad (7.32)$$

Note that Eq. 7.30 does not show the free convection scaling near the ground (the normalised variance decreases with height for small ξ).

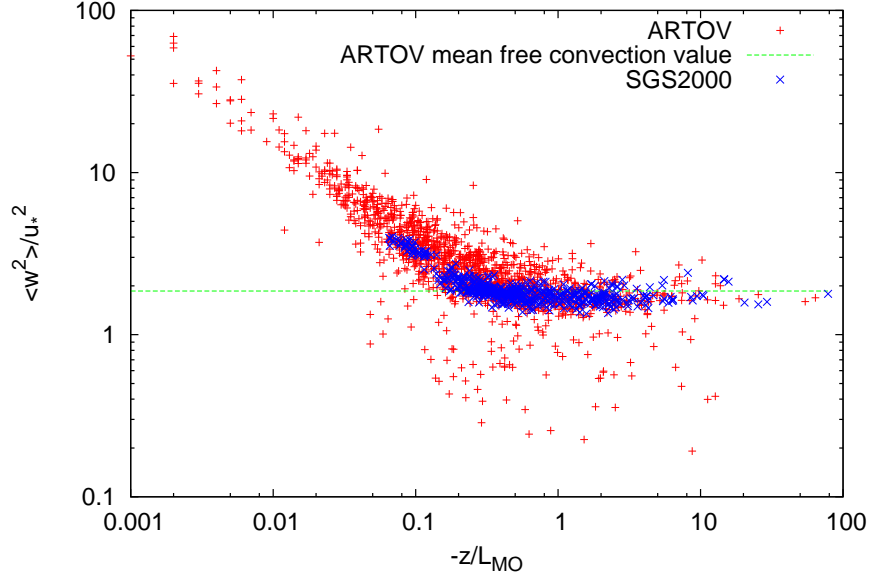


Figura 7.7: Free convection scaling: $\overline{u_3'^2}/w_*^2(z)$, from ARTOV data.

Confrontando le diverse espressioni si puo' adottare una formula generale. Si ha:

$$\frac{\overline{w'^2}}{W_*^2} = A_1 \left(\zeta^{2/3} + \frac{A_2}{A_1} \frac{u_*^2}{W_*^2} \right) (1 - 0.8\zeta)^2 \quad A_1 = 1.8 \quad A_2 = 1.25^2 \approx 1.6 \quad (7.33)$$

Questa espressione differisce da altre, come ad es. quella proposta da Sawford and Guest (1987) che tende a zero negli strati piu' in basso e piu' in alto. Almeno all'estremita' inferiore questa assunzione non e' giustificata.

La Fig. 7.7 mostra la varianza della velocita' verticale normalizzata su $w_*^2(z)$.

Fig. 7.8 shows the vertical velocity variance normalized over $w_*^2(h)$, as function of $z/h \equiv \xi$ (see Eq. 7.26), where h is estimated from a slab model (Villani et al., 2005). There is large scatter for the horizontal components (not shown) whereas the scaling turns out quite good for the vertical component.

Numerical values are as follows. For $i = 1$: $b_1 = 10.7 \pm 0.4$ is the mean free convection value from Eq. 7.24 with $b_i^{(0)} \equiv 0$ and the fit with Eq. 7.26 gives $b_1^{(0)} = 0.27 \pm 0.02$, $b_1 = 10.5 \pm 0.8$. The two determinations of b_1 agree; there is disagreement with Eq. 7.30 from Strunin et al. (2004).

For $i = 2$: $b_2 = 10.6 \pm 0.5$ is the mean free convection value; the fit with Eq. 7.26 gives: $b_2^{(0)} = 0.33 \pm 0.03$, $b_2 = 9.9 \pm 0.5$.

For $i = 3$: $b_3 = 1.86 \pm 0.02$ is the mean free convection value; the fit with Eq. 7.25 gives: $b_3^{(0)} = 0.028 \pm 0.002$, $b_3 = 2.74 \pm 0.06$.

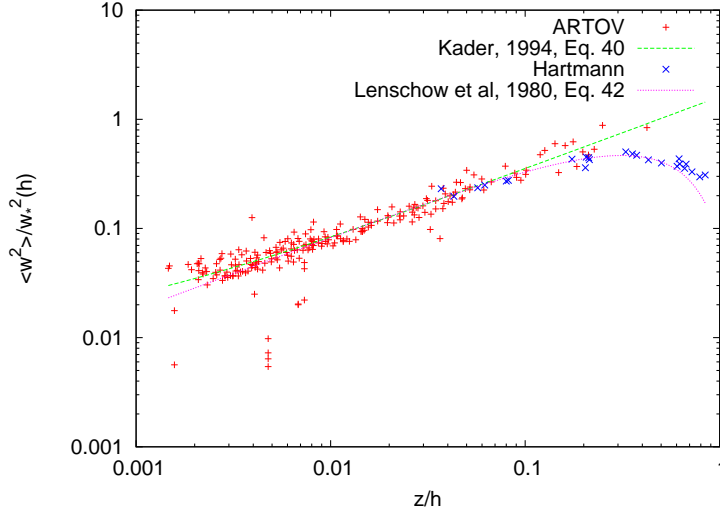


Figura 7.8: $\overline{u_3^2}/w_*^2(h)$ for free convection conditions.

Concerning temperature variance, as far the surface layer dependence is concerned, see Figs. 7.9 to ???. The mean free convection value is $a = 1.74 \pm 0.02$.

The fit with Eq. 7.28 gives: $a = 3.9 \pm 0.7$ $b = 1.53 \pm 0.05$ and that with Eq. 7.29 gives: $a = 3 \pm 1$ $b = 1.57 \pm 0.04$ This value can be compared with the coefficient 1.8 given in Eq. 7.32.

The surface layer data agree well with the data by Hartmann and the function proposed by (Strunin et al., 2004), Eq. 7.32, see Fig. 7.10.

Altri dati relativi a condizioni di convezione libera, da misure fatte a Boulder, CO: Hunt et al. (1988), sono riportati in Fig. 7.11, e da misure fatte a Roma Tor Vergata, in Fig. 7.12.

Matching the scaling between free convection and near neutral conditions leads to analytical forms such as:

$$\Phi_i^{(2)} = a_i + c_i(-\zeta)^{2/3} \quad (7.34)$$

and

$$\Phi_\vartheta^{(2)} = \frac{a_\vartheta}{1 + b_\vartheta \zeta^{2/3}} \quad (7.35)$$

Attenzione: per $\zeta \rightarrow 0$ la scala $\vartheta_* \rightarrow 0$ non e' piu' significativa, e la forma 7.35 non e' piu' applicabile. Assumendo che la varianza della temperatura non

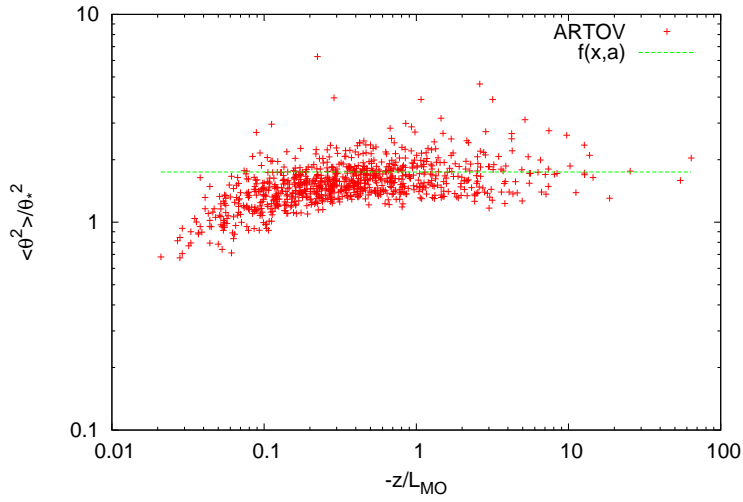


Figura 7.9: $\overline{\vartheta'^2}/\vartheta_*^2(z)$ for free convection conditions

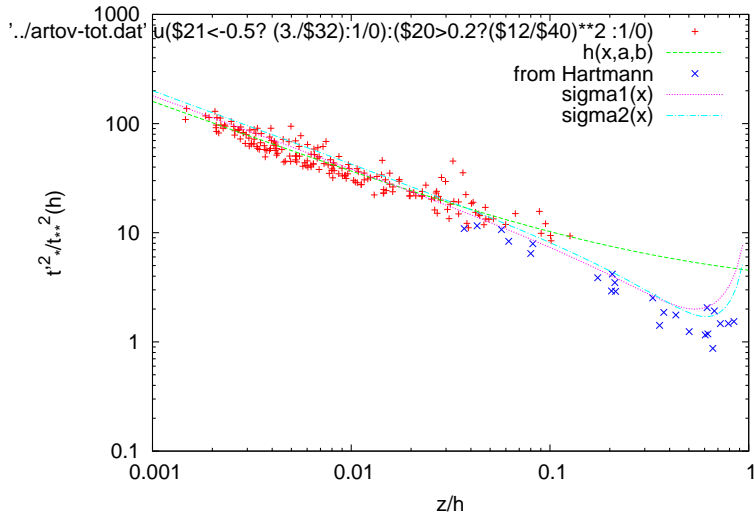


Figura 7.10: $\overline{\vartheta'^2}/\vartheta_*^2(h)$ for free convection conditions.

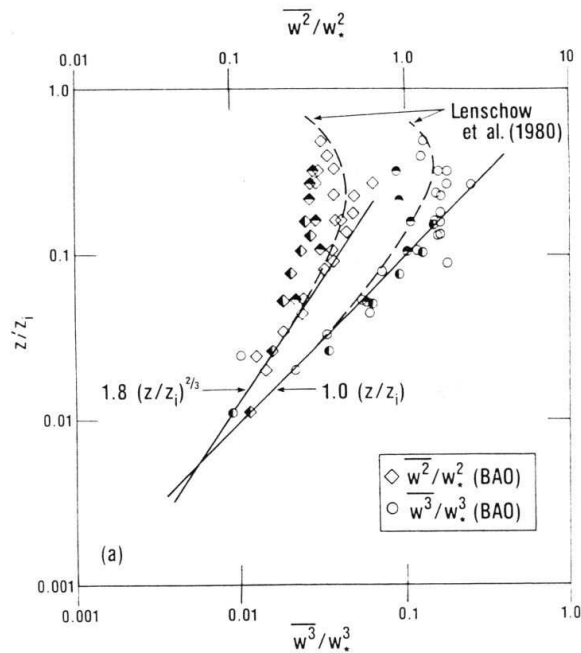


Figura 7.11: Momenti secondo e terzo della velocità verticale nella parte centrale dello strato limite convettivo, normalizzati sulla opportuna potenza della velocità di scala convettiva W_* . La quota è normalizzata all'altezza dello strato limite (Hunt et al., 1988).

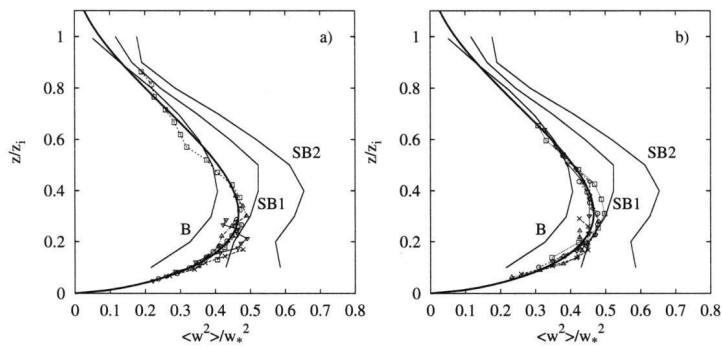


Figura 7.12: Dati di varianza normalizzata in funzione della quota, per alcuni casi, in due siti posti a diversa distanza dalla costa, presso Roma (a: AMA; b: PDM; Alberghi et al. (2002)). La linea spessa è di Lenschow et al. (1980). Le linee sottili indicano i risultati di LES con forzatura puramente termica (B), o con sovrapposizione di forzatura termica e meccanica (SB1, SB2): Moeng and Sullivan (1994).

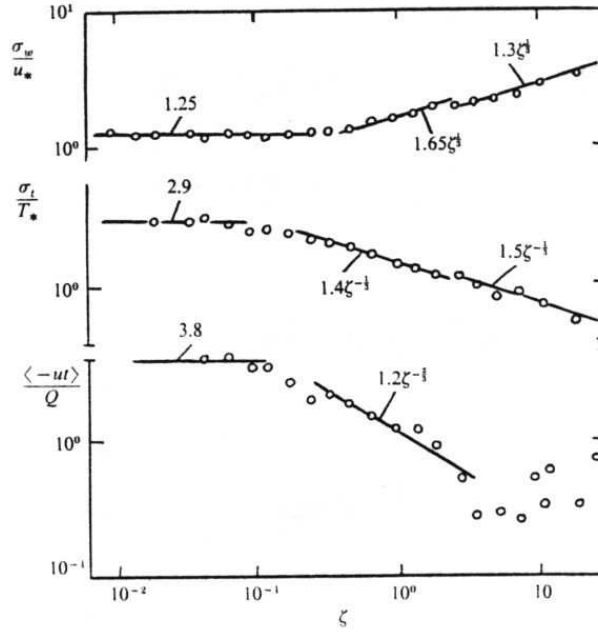


Figura 7.13: Deviazioni standard della varianza della velocita' verticale, della temperatura (le variabili sono normalizzate ai rispettivi valori al suolo) e flusso orizzontale di temperatura (normalizzato al flusso verticale), in funzione di z/L_{KY} (Kader and Yaglom, 1990).

possa dipendere dal flusso di calore in condizioni quasi neutrale ($\overline{\vartheta'^2} \propto \overline{w'\vartheta'^0}$) si ha:

$$\Phi_{\vartheta}^{(2)} \propto |\zeta|^{-2} \text{ for } |z/L| \rightarrow 0 \quad (7.36)$$

Some numerical values: Eq. 7.34 has been fitted to the ARTOV data. It results:

$$a_1 = 7.4 \pm 0.6, c_1 = 11.0 \pm 0.5$$

$$a_2 = 7.4 \pm 0.5, c_2 = 10.9 \pm 0.4$$

$$a_3 = 0.66 \pm 0.03, c_3 = 2.40 \pm 0.03$$

Eq. 7.35 has been fitted to the data with $\vartheta_* > 0.15$ (i.e., intense convective forcing) and with $-z/L > 0.02$, giving $a_{\vartheta} = 10 \pm 1$ and $b_{\vartheta} = 7 \pm 1$.

Dati relativi a condizioni convettive, da Kader and Yaglom (1990), sono riportati in Fig. 7.13. Altri dati (da ARTOV) sono presentati nella Fig. 7.14 per la componenti verticale della velocita' e nella Fig. 7.15 per la temperatura.

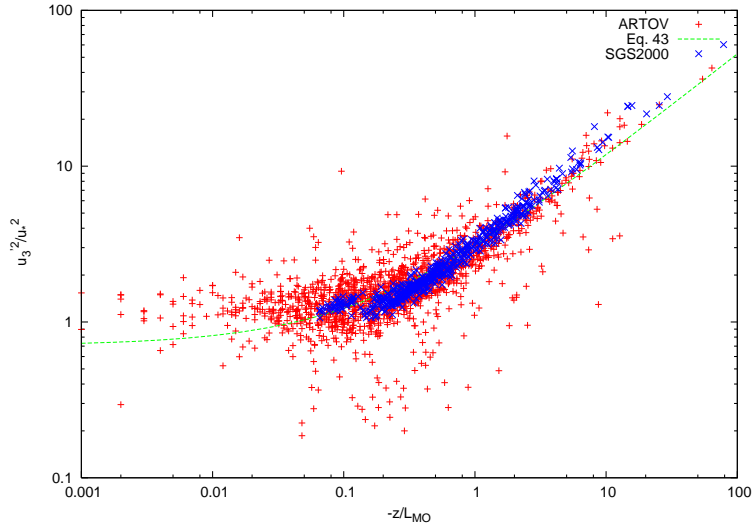


Figure 7.14: $\overline{u_3'^2}/u_*^2$ for unstable conditions

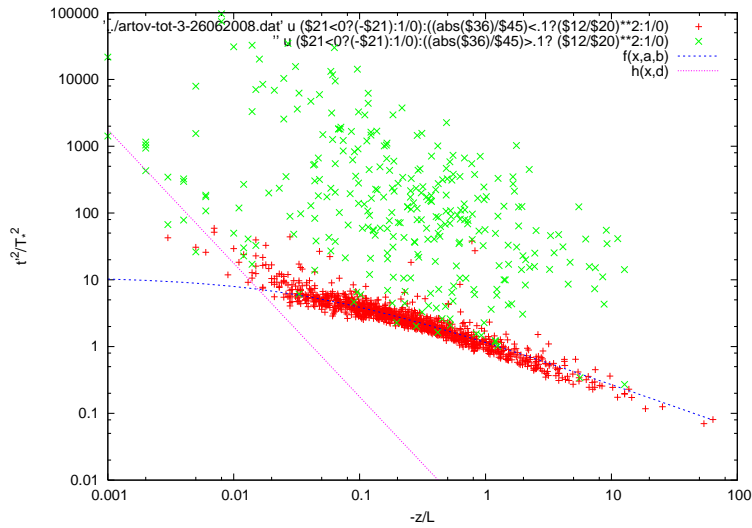


Figure 7.15: Temperature fluctuation variance normalised with ϑ_*^2 for unstable cases. Red symbols refer to almost steady cases; green symbols otherwise. The continuous line refers to Equation (7.35) and the dot-dash line to Equation (7.36).

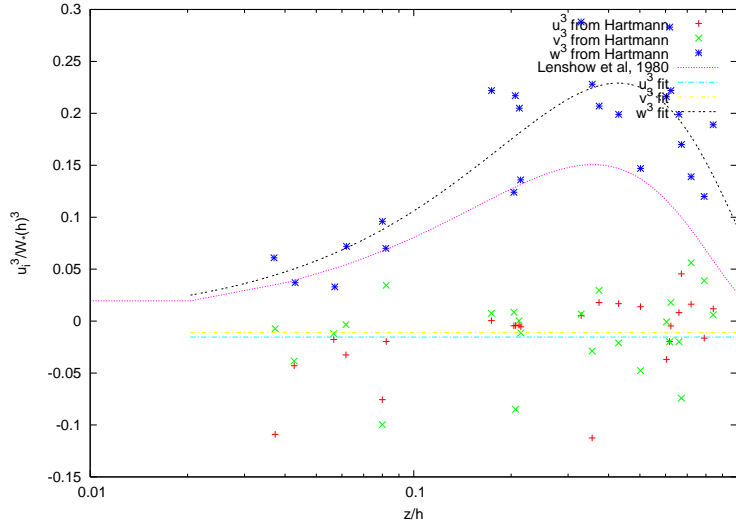


Figura 7.16: $\overline{u_i^3} / w_*(h)^3$ as function of ξ . The mean value for the horizontal components is -0.015 ± 0.008 for u and -0.011 ± 0.008 for v . The fit for the vertical components reads $1.3\xi(1 - 0.58\xi)^3$

7.5 Third order moments

7.5.1 $\overline{u_i^3}$

The free convection scaling in the surface layer reads:

$$\overline{u_i^3} \propto w_*^3(z) \quad (7.37)$$

i.e., $\Phi_i^{(3)} \propto \zeta$.

From Lenschow et al. (1980):

$$\frac{\overline{u_3^3}}{w_*(h)^3} = 1.0\xi(1 - 0.7\xi)^3 \quad (7.38)$$

consistent with the free convection scaling.

The data by Hartmann (see Gryanik and Hartmann, 2002, , Table 1) are reported in Figs. 7.16, with Eq. 7.38. The figure shows the three components: the third order moment is almost zero for the horizontal components. The vertical component shows positive values.

Surface layer data from SGS2000: a clear behaviour is displayed by the third order moment of the vertical velocity component: see Fig. 7.17. Per le componenti orizzontali un valore rappresentativo per il momento terzo e' zero (con grandi fluttuazioni). Per la componente verticale si osserva che in generale il momento terzo e' positivo e la pendenza proporzionale a ζ .

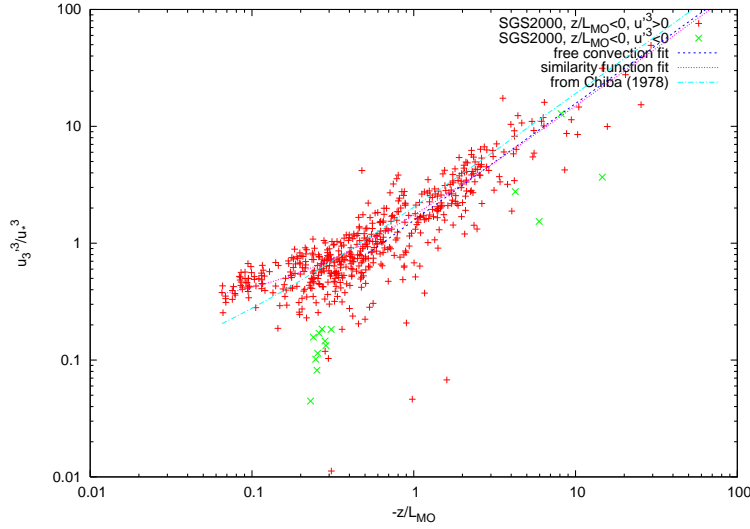


Figure 7.17: $\Phi_3^{(3)}(\zeta)$. Note that negative values (reported after a change in sign) are very few. The fitting relationship reads $\Phi_3^{(3)} = 0.27 - 1.47\zeta$. Chiba (1978) relationship Eq. 7.39 with the $\Phi_3^{(2)}$ determined from ARTOV data is also reported.

For the third order moment of the vertical velocity, the classical paper by Chiba (1978) gives

$$\Phi_3^{(3)} = -0.6\kappa^{-1}\zeta + 0.1 \left(\Phi_3^{(2)} \right)^{3/2} \quad (7.39)$$

The original figure is reported in Fig. 7.18.

7.6 Fourth order moments

7.6.1 $\overline{u_i^4}$

The data by Hartmann (see Gryanik and Hartmann, 2002, , Table 1) are reported in Fig. 7.19. The fourth order moment is quite variable for the horizontal components (not shown). The vertical component shows a maximum in the centre of the CBL.

From SGS2000 the overall behaviour for convective conditions is shown in Fig. 7.20 for the vertical component of velocity.

The free convection scaling is quite evident for $-\zeta > 0.5$ in Fig. 7.21.

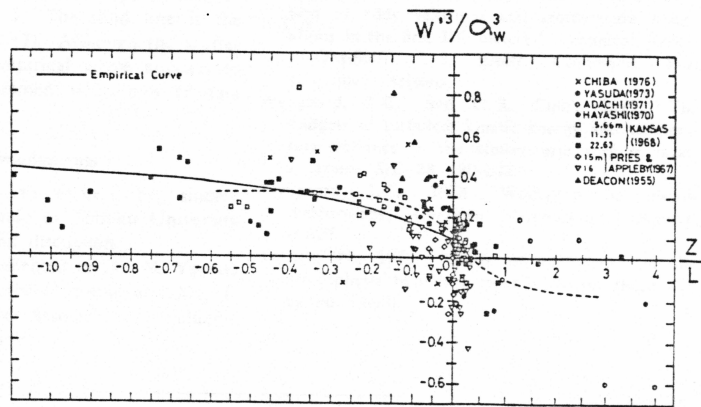


Figura 7.18: Variazione del momento terzo della componente verticale della velocità (normalizzata) in funzione di z/L_{MO} nello strato superficiale (Chiba, 1978).

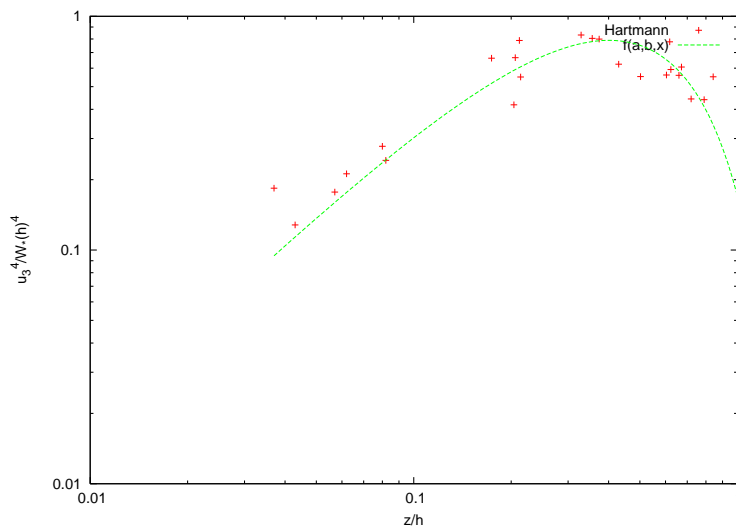


Figura 7.19: $\overline{u_3^4}/w_*^4(h)$ as function of ξ . The fit on Hartmann data reads $8.4\xi^{4/3}(1 - 0.62\xi)^4$

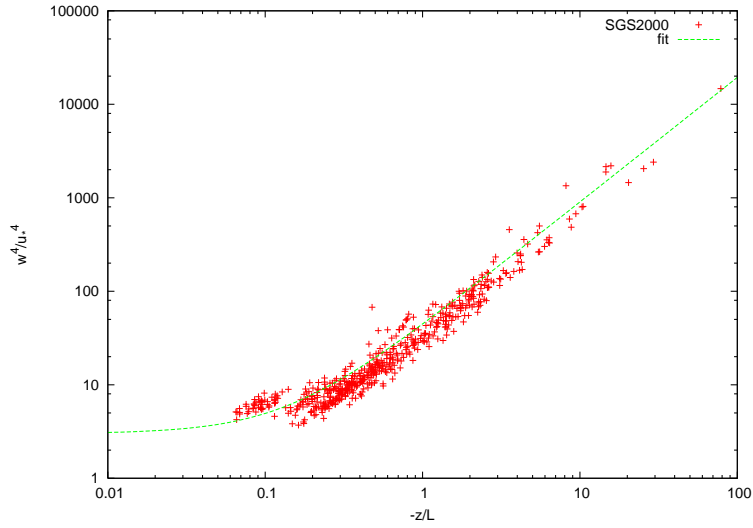


Figure 7.20: $\Phi_3^{(4)}(\zeta)$. The data are quite consistent with the free convection scaling: they increase as $42 \zeta^{4/3}$ for $\zeta < -0.5$.

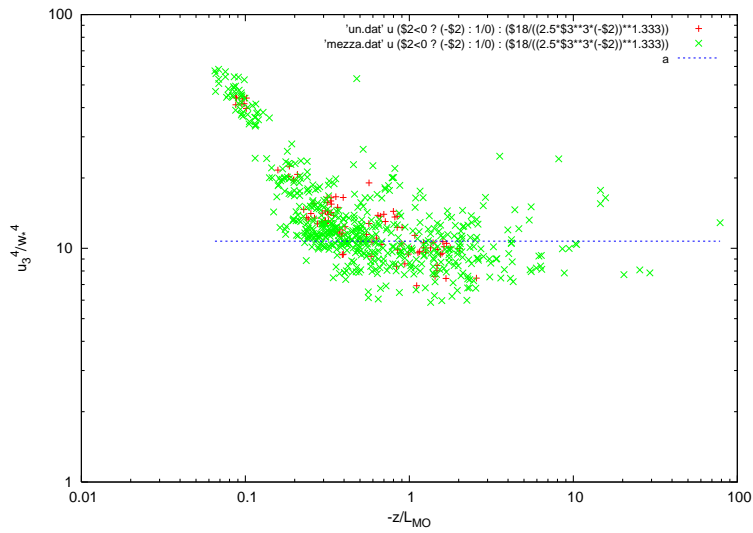


Figure 7.21: Free convection scaling for $\overline{u_3^4}$.

7.7 Andamento della dissipazione di energia cinetica

Wyngaard and Coté (1971):

$$\Phi_\varepsilon \equiv \frac{\kappa \varepsilon z}{u_*^3} = \left(1 + 0.5|\zeta|^{2/3}\right)^{3/2} \quad (7.40)$$

Kader and Yaglom (1990) suggeriscono la seguente espressione nel sottostato dinamico:

$$\frac{\varepsilon z}{u_*^3} = 2.5 \text{ per } z < L_{KY} \quad (7.41)$$

che e' analoga a:

$$\frac{\varepsilon h}{W_*^3} = 2.5 \left(\frac{u_*}{W_*}\right)^3 \zeta^{-1} \quad (7.42)$$

e nello strato di convezione libera:

$$\frac{\varepsilon z}{u_*^3} = 1.2 \frac{z}{-\kappa L_{MO}} \text{ per } z > -L_{MO} \quad (7.43)$$

o

$$\frac{\varepsilon h}{W_*^3} = 1.2 \quad (7.44)$$

Si nota che la Eq. 7.41 e' consistente con la approssimazione dell'equazione dell'energia cinetica per flussi non stratificati (Eq. 6.6 con $\mathcal{R}_f = 0$) e la Eq. 7.44 qualitativamente con la approssimazione di convezione libera, ovvero $g/\vartheta_{00} \overline{w'\vartheta'} - \varepsilon = 0$. (Il valore empirico del coefficiente 1.2 suggerisce la presenza di una percentuale del 20% extra di produzione di energia cinetica.)

Anche per queste relazioni valgono le considerazioni fatte sulla pretesa universalita' dei coefficienti: in realta' la variabilita' di tali coefficienti e' sensibile. Le simulazioni LES eseguite da Moeng and Sullivan (1994) suggeriscono un coefficiente di 0.4 invece di 1.2. Il presente risultato concorda piuttosto bene con l'espressione fornita da Luhar and Britter (1989), valida per la parte centrale del CBL:

$$\frac{\varepsilon h}{W_*^3} = 1.5 - 1.2\zeta^{1/3} \quad (7.45)$$

Nuovamente si puo' scrivere un'espressione generale:

$$\frac{\varepsilon h}{W_*^3} = 2.5 \left(\frac{u_*}{W_*}\right)^3 \zeta^{-1} + 1.3 - 1.2\zeta^{1/3} \quad (7.46)$$

Nello strato superficiale il lavoro recente di Albertson et al. (1997) suggerisce la seguente formulazione:

$$\Phi_\varepsilon = 0.61 - 1.75\zeta \quad (7.47)$$

che in condizioni di convezione libera, utilizzando la Eq. 7.13, fornisce l'approssimazione $\varepsilon \simeq 1.75w_*^3(z)/z$.

Altre formulazioni nello strato superficiale sono apparse di recente in letteratura. Frenzen and Vogel (2001) propongono

$$\Phi_\varepsilon = 0.85(\Phi_m - \zeta) \quad (7.48)$$

dove la funzione Φ_m e' data dalla Eq. 7.18 e suggerisce che la somma dei termini di ordine tre contribuisca per il 15% al bilancio di energia nel surface layer.

Charuchittipan and Wilson (2009) sostengono invece che i termini di ordine 3 siano trascurabili e/o si annullino a vicenda: dunque

$$\Phi_\varepsilon \simeq \Phi_m - \zeta \quad (7.49)$$

Si noti che dalla conoscenza della varianza della velocita' verticale e dell'andamento della dissipazione si puo' calcolare il tempo scala $T_z = \overline{w'^2}/\varepsilon$.

7.8 Ancora sui flussi di calore

The point was discussed also by Wyngaard et al. (1971, pag. 1175), who suggested for the unstable case the simple parameterisation $\overline{u'_1 \vartheta'}/\overline{u'_3 \vartheta'} = 5\Phi_m \Phi_h$, the constant being derived from their data fit. The form of the nondimensional functions Φ_m and Φ_h is given by Eq. 7.17 and 7.21. The same parameterisation with a different choice of the functions, derived from Kader and Yaglom (1990) (Eq. 7.14, 7.15, 7.16 and 7.19, 7.20) can be investigated. The dependence of the ratio between horizontal and vertical fluxes from stability is shown in Fig. 7.22.

It can be observed that $|\mathbf{q}_H| \simeq \overline{\vartheta' u'_1}$ if lateral inhomogeneities are negligible and a perfect alignment of the mean wind with x_1 is provided.

7.9 Bilancio di temperatura potenziale e altezza del CBL

La valutazione dell'evoluzione temporale della temperatura potenziale media nel CBL costituisce un metodo semplice per studiarne il bilancio energetico e valutarne l'altezza (vedi lo schema di fig. 7.23). L'approccio integrale e' chiaramente semplificato, e si fonda sull'osservazione che le quantita' medie sono ben rimescolate nell'interno del CBL, proprio grazie alle proprieta' della turbolenza convettiva.

In condizioni di omogeneita' orizzontale, sul piano, ed in assenza di sorgenti e pozzi, l'equazione per la temperatura potenziale si riduce a:

$$\frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w' \vartheta'}}{\partial z} \quad (7.50)$$

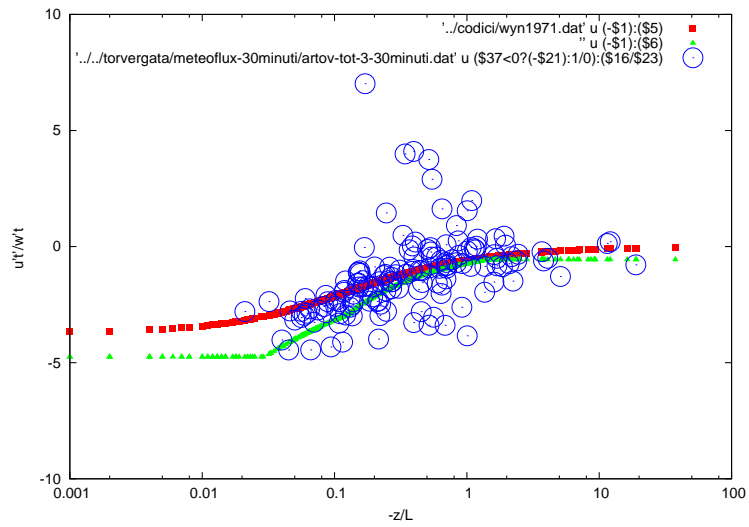


Figura 7.22: Wyngaard parameterisation of heat fluxes: red squares: Φ from Högström (1988), green triangles: from Kader and Yaglom (1990). Circles: ARTOV data

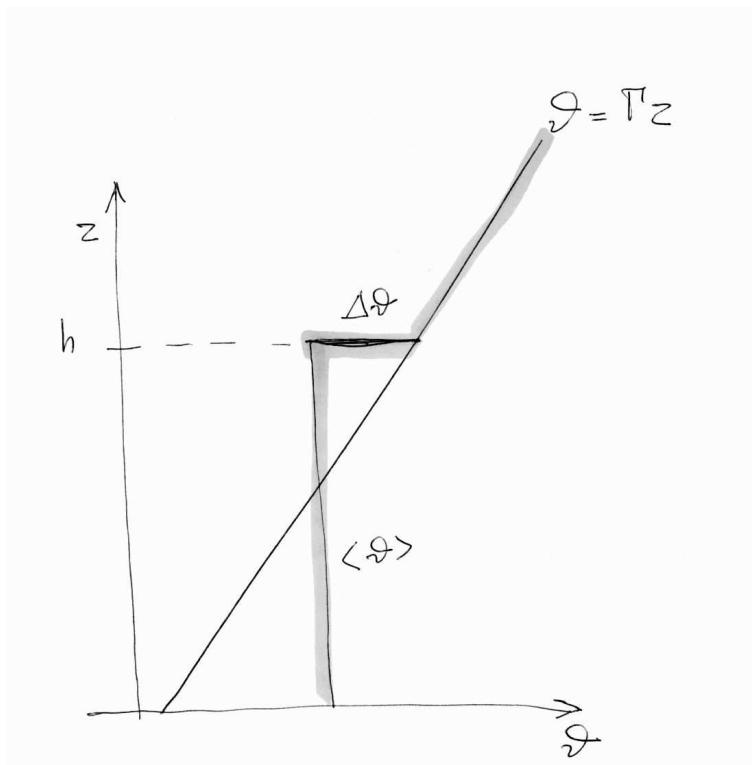


Figura 7.23: Schema per l'applicazione del modello 'slab'.

La temperatura media nello strato mescolato e' definita da $\Theta \equiv h^{-1} \int_0^h \bar{\vartheta} dz$. Integrando l'eq. 7.50 tra 0 e h si ha:

$$\int_0^h \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} dz = \overline{w'\vartheta'}|_0 - \overline{w'\vartheta'}|_h \quad (7.51)$$

Osservo che

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \bar{\vartheta} dz \equiv \frac{\partial}{\partial t} [h\Theta] = \int_0^h \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} dz + \overline{\vartheta(h)} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (7.52)$$

e quindi

$$\int_0^h \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} dz = [\Theta - \overline{\vartheta(h)}] \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{d\Theta}{dt} \quad (7.53)$$

Assumendo che il profilo di temperatura sia pressoché costante con la quota (ossia $\Theta - \vartheta(h) \simeq 0$), rimane:

$$h \frac{d\Theta}{dt} = \overline{w'\vartheta'}|_0 - \overline{w'\vartheta'}|_h \quad (7.54)$$

Questa relazione indica che l'evoluzione della temperatura media dipende dal bilancio dei flussi di calore, nelle condizioni semplificate attuali.

Sia fissato il gradiente verticale di temperatura dell'atmosfera $\Gamma = d\vartheta_a/dz$. Si definisce il salto di temperatura alla sommità del CBL (una inversione idealizzata) $\Delta\Theta = \vartheta_a(h) - \Theta$. Se $\Delta\Theta \neq 0$ esiste un flusso di calore, che in analogia alla relazione flusso-gradiente viene parametrizzato come una velocità di 'entrainment' w_e moltiplicata per il salto di temperatura stesso:

$$\overline{w'\vartheta'}|_h = -w_e \Delta\Theta \quad (7.55)$$

Lo strato limite così semplificato e' dunque descritto dalle variabili h e $\Delta\Theta$, e si richiede una espressione per w_e , tenendo conto che, per ragioni dimensionali,

$$\frac{dh}{dt} = w_e = -\frac{\overline{w'\vartheta'}|_h}{\Delta\Theta} \quad (7.56)$$

in assenza di forzanti meteorologiche (p.es. la subsidenza). Sostituendo con l'espressione 7.55 nell'Eq. 7.54 si ha:

$$\frac{d\Delta\Theta}{dt} = \Gamma w_e - \frac{\overline{w'\vartheta'}|_0}{h} - \frac{\Delta\Theta}{h} w_e \quad (7.57)$$

Questa e' l'equazione base per i cosiddetti 'slab model' di CBL, e non e' altro che una diversa formulazione dell'equazione per la temperatura, Eq. 7.50.

Le Eq. 7.56 e 7.57 costituiscono un sistema nelle due incognite altezza e salto di temperatura.

Nota. L'equazione 7.57 e' singolare per $h = 0$, che pure costituisce la condizione iniziale naturale per il processo di crescita dello strato limite convettivo. Una formulazione non singolare si ottiene considerando l'equazione per la quantita' $k = h\Delta\Theta$:

$$\frac{dk}{dt} = h\Gamma w_e - \overline{w'\vartheta'}|_0 \quad (7.58)$$

assieme alla Eq. 7.56.

Si puo' eliminare w_e dalla Eq. 7.56 utilizzando la Eq. 7.57: si ottiene l'espressione

$$\frac{dh}{dt} = \Gamma^{-1} \left(1 - \frac{\Delta\Theta}{\Gamma h}\right)^{-1} \left(\frac{d\Delta\Theta}{dt} + \frac{\overline{w'\vartheta'}|_0}{h}\right) \quad (7.59)$$

7.9.1 The 'encroachment' model

La versione piu' semplice di modello si ottiene imponendo $\Delta\Theta = 0$, il che equivale ad azzerare il flusso all'altezza dell'inversione, senza azzerare la velocita' di 'entrainment'. Rimane

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\overline{w'\vartheta'}|_0}{\Gamma h} \quad (7.60)$$

ossia l'evoluzione del CBL e' determinata esclusivamente dal flusso al suolo e dal gradiente di temperatura ambiente. Tipicamente il flusso di calore dipende dal tempo. In una ipotesi modellistica molto semplice, $\overline{w'\vartheta'}|_0 = F \sin(\pi t/T)$ dove T potrebbe essere la durata del periodo di insolazione diurno. La soluzione per l'altezza e' semplice:

$$h(t) = \left[\frac{2FT}{\pi\Gamma} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right) \right]^{1/2} \quad (7.61)$$

7.9.2 More complex models

Versioni piu' complesse prevedono formulazioni per la velocita' di 'entrainment' che dipendono da parametri interni alla dinamica del CBL, ed in particolare dal bilancio di energia cinetica. Ipotizzando una situazione di equilibrio alla sommita' del CBL tra produzione meccanica di energia cinetica e distruzione dovuta alla stabilita' dell'inversione:

$$-\overline{u'w'} \frac{d\bar{u}}{dz} + \frac{g}{\vartheta_{00}} \overline{w'\vartheta'} = 0 \quad (7.62)$$

e stimando il termine di 'shear' proporzionale a $\overline{w'^2}^{3/2}/h$, Tennekes (1973) suggerì la seguente forma per w_e (basandosi sull'espressione 7.55):

$$w_e = \frac{c_1 \overline{w'^2}^{3/2}/h}{g\Delta\Theta/\vartheta_{00}} \quad (7.63)$$

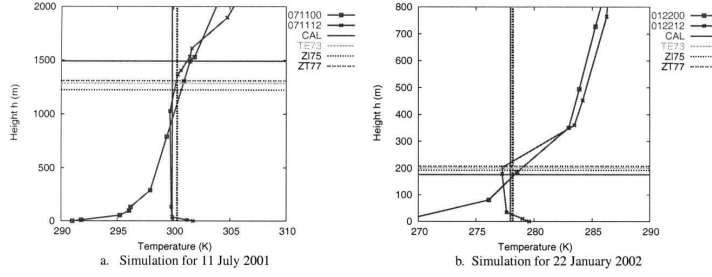


Figura 7.24: Simulazioni del profilo verticale di temperatura potenziale in CBL dal modello 'slab' per un caso estivo (a sinistra) e invernale (a destra) alle ore 12 GMT in un sito della Valle Padana. Sono riportati i risultati per diverse chiusure della velocita' di 'entrainment'. Il profilo misurato alla stessa ora e' riportato (simboli: x). Il profilo di temperatura precedente all'alba e' determinato dal sondaggio misurato alla mezzanotte (simboli: quadrati). Le linee orizzontali mostrano la quota dell'inversione calcolata dal modello. (Villani et al., 2005)

Anche questa espressione e' singolare per $h = 0$.

Facendo l'ipotesi che l'energia cinetica turbolenta dipenda dai flussi al suolo, cioe' $\overline{w'^2} = f(W_*, u_*)$, si puo' migliorare il modello, facendo dipendere l'evoluzione del CBL da galleggiabilita' e 'shear' al suolo. Esistono varie proposte per la forma di $\overline{w'^2}$. Alcune esempi di soluzione del sistema risultante (costituito dall'equazione per l'evoluzione di h e da quella per l'evoluzione di $\Delta\Theta$) sono riportate in Fig. 7.24.

Some insight can be obtained using a formulation for the flux at the CBL top as follows:

$$\overline{w'\vartheta'}|_h = -A\overline{w'\vartheta'}|_0 - B\frac{u_*^3\vartheta_{00}}{gh} = -\overline{w'\vartheta'}|_0 \left(A - B\kappa\frac{L_{MO}}{h} \right) \quad (7.64)$$

suggested by Batchvarova and Gryning (1990) as a simplification of a Zilitin-kevich (1975) formula. Suggested values are $A = 0.2$ and $B = 2.5$. (Note that this formula is equivalent to the expression used by Luhar (1998), with $A = C_K$ and $B = C_K C_N^3$: they suggest $C_K = 0.2$ and $C_N = 1.33$.)

We are looking for an expression of $\Delta\Theta$ as function of h . Given

$$\frac{d\Delta\Theta}{dt} = \frac{d\Delta\Theta}{dh} \frac{dh}{dt} \quad (7.65)$$

and using Eq. 7.56, Eq. 7.57 becomes

$$-\frac{d\Delta\Theta}{dh} \frac{\overline{w'\vartheta'}|_h}{\Delta\Theta} = -\Gamma \frac{\overline{w'\vartheta'}|_h}{\Delta\Theta} - \frac{\overline{w'\vartheta'}|_0 - \overline{w'\vartheta'}|_h}{h} \quad (7.66)$$

Using Eq. 7.64 it results:

$$\frac{d\Delta\Theta}{dh} = \Gamma - \frac{1 + A - B\kappa L_{MO}/h}{h(A - B\kappa L_{MO}/h)} \Delta\Theta \quad (7.67)$$

Let us consider two extreme cases, describing respectively the mature evolution of the CBL and the initial conditions, as friction rather than convection dominates. For pure convection, $B = 0$, Eq. 7.67 reads:

$$\frac{d\Delta\Theta}{dh} = \Gamma - \frac{1 + A}{hA} \Delta\Theta \quad (7.68)$$

Putting $\Delta\Theta = a h$ and equating the two sides of the equation it results $a = A\Gamma/(2A + 1)$ or

$$\Delta\Theta = \frac{A}{2A + 1} \Gamma h \quad (7.69)$$

and substituting into Eq. 7.56 we obtain an equation as 7.60, with a coefficient $2A + 1$ that multiplies the surface heat flux: the growth of the CBL height is enhanced by the heat flux at the top.

For neutral conditions, $A = 0$, and from Eq.7.56

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Bu_*^3 \vartheta_{00}}{gh\Delta\Theta} \quad (7.70)$$

Eq. 7.66 becomes:

$$\frac{d\Delta\Theta}{dh} = \Gamma - \frac{\Delta\Theta}{h} \quad (7.71)$$

and also in this case a linear solution results:

$$\Delta\Theta = \frac{\Gamma}{2} h \quad (7.72)$$

and using Eq. 7.56:

$$\frac{dh}{dt} = \left[\frac{2 Bu_*^3 \vartheta_{00}}{g\Gamma h^2} \right] \quad (7.73)$$

that gives rise to a slower growth.

Note that if the limit of large Obukhov length is considered in Eq. 7.67, (thus considering the surface heat flux small but non zero), it results the same solution 7.72 as before.

For practical purposes, Gryning and Batchvarova (1990) suggested the following interpolation formula between Eqs. 7.69 and 7.72 (see Fig. 7.25):

$$\frac{\Delta\Theta}{\Gamma h} = \frac{A - B\kappa L_{MO}/h}{1 + 2A - 2B\kappa L_{MO}/h} \quad (7.74)$$

Using this relation Batchvarova and Gryning (1990, 1994) derived an expression for the boundary layer height, which can be written:

$$\frac{h^2}{(1 + 2A)h - 2B\kappa L_{MO}} \frac{dh}{dt} = \frac{\overline{w'\vartheta'}|_0}{\Gamma} \quad (7.75)$$

using the present formulation for the flux of the inversion height, Eq. 7.64 (in the original paper, the authors used a more complex expression, their Eq. 5).

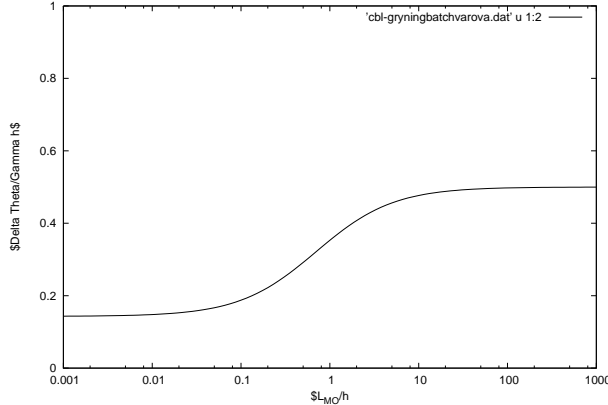


Figura 7.25: Relation 7.74.

7.10 The vertical mixing in convective conditions

Some data describing the vertical profiles of momentum and heat flux, as well as mean potential temperature, have been provided by Hartmann (see Gryanik and Hartmann, 2002, , Table 1) and are reported in Fig. 7.26, 7.27, 7.28. The fluxes have normalized to their surface value. Although the variability of the data is large, the decreasing trend from ground to boundary layer top is evident for the heat flux, and cannot be excluded for the momentum flux (component in x direction).

Looking at numerical simulations of the boundary layer, it results that vertical flux of momentum $\overline{u'w'}$ goes to zero near the boundary layer top approximately linearly, both in the neutral and the convective cases, whereas the mean velocity vertical derivative is almost zero in the central part of the convective layer (but not in the neutral one): see for instance Figs. 7.29 and 7.30.

Thus, the vertical fluxes of momentum and of heat are not consistent with a flux-gradient relationship, with a finite diffusion coefficient. The flux of a quantity ζ (velocity component or temperature, for instance) can be expressed as the sum of a local and a non-local term:

$$\overline{\zeta'w'} = -K_{\zeta} \frac{d\overline{\zeta}}{dz} + \overline{\zeta'w'}_{NL} \quad (7.76)$$

(see, for instance Deardorff, 1966; Wyngaard, 1987; Holtslag and Moeng, 1991; Brown and Grant, 1997).

Usually, K_{ζ} is taken to be proportional to the product of a velocity and a time scale; the non-local flux is related to some integral properties of the CBL. Different authors suggest different parameterisations.

For momentum, Brown and Grant (1997) suggest

$$K_m = w_m \kappa h (z/h) (1 - z/h)^2 \quad (7.77)$$

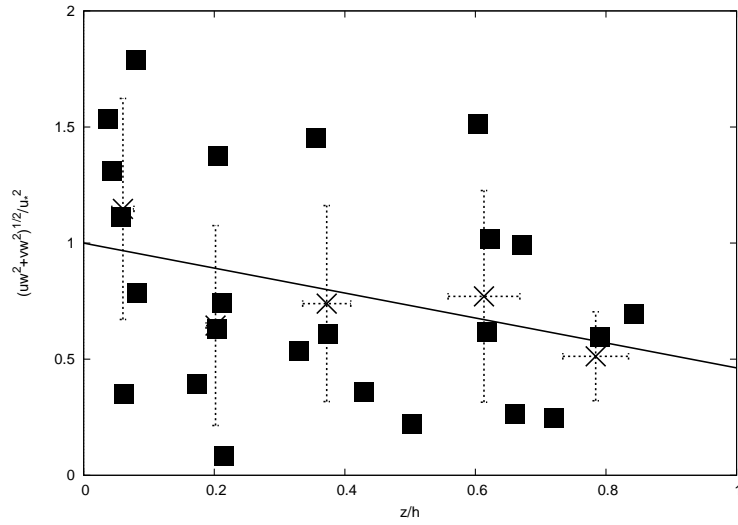


Figure 7.26: Momentum vertical fluxes in the CBL, normalised to the surface value $-u_*^2$ obtained as a best fit from the $(\overline{u'w'} + \overline{v'w'})^{1/2}$ data, from the observations by Hartmann (pers.comm.).

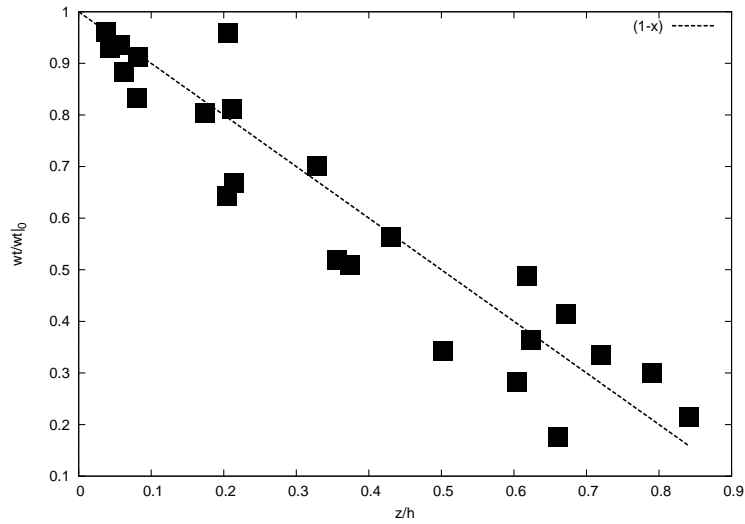


Figure 7.27: Sensible heat vertical flux in the CBL, normalised to the surface value $\overline{w'w'}$, from the observations by Hartmann (pers.comm.).

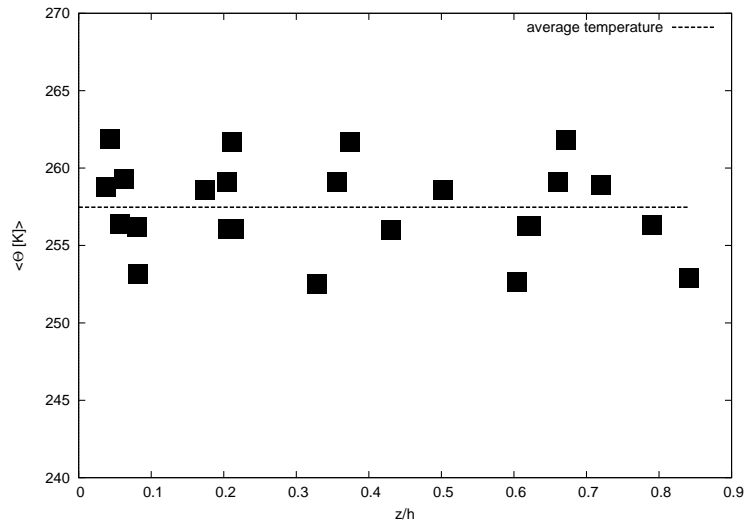


Figura 7.28: Mean potential temperature in the CBL, from the observations by Hartmann (pers.comm.).

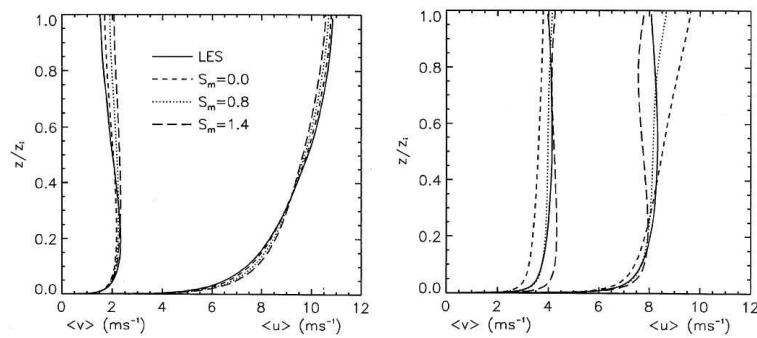


Figura 7.29: Continuous lines: mean wind profiles from neutral (BNLR - left panel) and convective (M134 - right panel) Large Eddy Simulation runs from Brown and Grant (1997). Dashed lines refer to various closures.

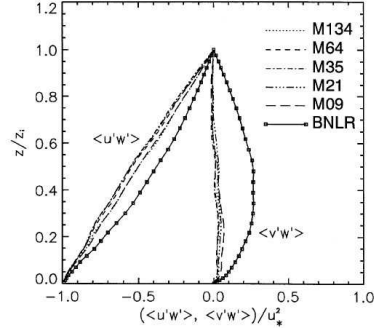


Figure 7.30: Non-dimensional stress profiles from the barotropic Large Eddy Simulations (x -axis aligned with the surface stress): M134 ($-h/L = 13.4$), M64 (6.4), M35 (3.5), M21 (2.1), M09 (0.9) and BNL (0.0). From Brown and Grant (1997).

where $w_m = u_*/\Phi_m$ for $z < 0.1h$ and $w_m = (u_*^3 + 0.6W_*^3)^{1/3}$ for $z > 0.1h$.

For the non-local term, Brown et al. (2008) suggest

$$\overline{u'_i w'}_{NL} = \frac{\rho}{\rho_{00}} \frac{2.7W_*^3}{u_*^3 + 0.6W_*^3} \left[\frac{z'}{h'} \left(1 - \frac{z'}{h'} \right)^2 \right] \overline{u'_i w'}|_0 \text{ for } 0.1h < z < h \quad (7.78)$$

where $z' = z - 0.1h$ and $h' = 0.9h$.

Capitolo 8

Lo strato residuale (RL) e la transizione giorno-notte

8.1 Cosa rimane del giorno?

Dopo il tramonto, a partire dal suolo si sviluppa uno strato limite stabile, di altezza molto inferiore allo strato limite convettivo diurno. Alle quote comprese tra l'altezza dello strato stabile e l'altezza dello strato convettivo rimane uno strato di atmosfera, caratterizzato dalla turbolenza prodotta durante il giorno dalla convezione, che ora non ha più forzanti e quindi decade nel tempo. Questo strato è isolato dal suolo (non è uno strato limite in senso stretto) e si chiama strato residuale ('residual layer': RL)

Un'immagine del profilo di temperatura che caratterizza lo strato residuale la troviamo nella Fig. 9.8: la temperatura poco dopo il tramonto (linea nera) è uniforme (come nel CBL) al di sopra della regione stabile a contatto con il suolo e fino a 1400 m: si tratta di ciò che rimane del CBL:

L'energia cinetica della turbolenza decade per dissipazione e per eventuale mescolamento alla sommità ('entrainment' di aria non turbolenta al di sopra dell'inversione).

More generally, it is of concern the transition from day (with positive heat flux) to night (with negative heat flux) which give rise to the RL.

Alcune misure sono riportate in Caughey and Kaimal (1977) e da Nadeau et al. (2011). Altre indicazioni utili sono state derivate dallo studio della turbolenza nello strato superficiale durante un'eclissi di sole: Anfossi et al. (2004). Sono state fatte delle LES: Nieuwstadt and Brost (1986), Sorbjan (1997) ed alcuni studi analitici: Goulart et al. (2003).

8.2 Semplici modelli

8.2.1 The TKE decay after shut-off of the buoyancy flux

Si consideri l'equazione per l'energia cinetica turbolenta, Eq. 3.85. Considerando condizioni di omogeneità orizzontale e di assenza di produzione di

energia cinetica (per effetto di shear e di flussi di calore), si ha un bilancio tra decadimento temporale, divergenza dei momenti terzi e dissipazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}q^2\right) = -\frac{d}{dz}\left(\overline{p'w'} + \frac{1}{2}\overline{(u'^2 + v'^2 + w'^2)w'}\right) - \varepsilon \quad (8.1)$$

Si consideri il valore mediato dell'energia cinetica sullo spessore dello strato. Integrando la divergenza dei momenti terzi si riduce alla differenza tra il valore alla sommita' e quello alla base di RL. Approssimativamente, possiamo immaginare che il valore alla base sia nullo (gli scambi sono inibiti dalla stabilita' dello strato sottostante). Una possibile sorgente potra' essere dovuta all' 'entrainment' alla sommita' dello strato. Al momento la si trascura. Assumiamo anche che il flusso di calore sia nullo. Rimane dunque un decadimento temporale guidato dalla dissipazione.

Su basi dimensionali si puo' scrivere $\varepsilon \sim q^2/T \sim q^3/L$ dove sono messi in evidenza un tempo oppure una lunghezza di scala. Se si assume che il tempo scala della turbolenza nello strato residuale rimanga costante, la prima espressione suggerisce:

$$\frac{d}{dt}(q^2) = -A\frac{q^2}{T} \quad (8.2)$$

e quindi $q^2 \sim \exp(-t/T)$. All'istante iniziale $t = 0$ si potrebbe assumere $q^2(0) = CW_*^2$.

Viceversa, se assumiamo che la scala spaziale dei vortici si mantenga costante (p.es., proporzionale all'altezza del CBL prima del tramonto: si tratta di vortici generati da quella turbolenza, con quella scala) si ottiene

$$\frac{d}{dt}(q^2) = -B\frac{(q^2)^{3/2}}{L} \quad (8.3)$$

e quindi l'energia decade secondo una legge di potenza $q^2 \sim t^{-2}$. Partendo dallo stesso valore all'istante iniziale si ottiene

$$\frac{q^2}{W_*^2} = \left(\frac{B}{2}\frac{W_*t}{L} + \frac{1}{C^{1/2}}\right)^{-2} \quad (8.4)$$

Note that $\varepsilon = C_\varepsilon(q^2/2)^{3/2}/h$ with $C_\varepsilon = 2$ was suggested by Nieuwstadt and Brost (1986).

8.2.2 The TKE decay for a decreasing heat flux

A simple model to interpret the behaviour of the afternoon and early evening decay of a CBL is reported by Nadeau et al. (2011). Using the TKE equation, retaining the heat flux production and dissipation, neglecting shear production and third order terms divergence, the average of TKE in a layer near the ground can be written as:

$$\frac{dq^2/2}{dt} = A\frac{\overline{gw'\vartheta'}}{\vartheta_{00}} - C_\varepsilon\frac{(q^2/2)^{3/2}}{h} \quad (8.5)$$

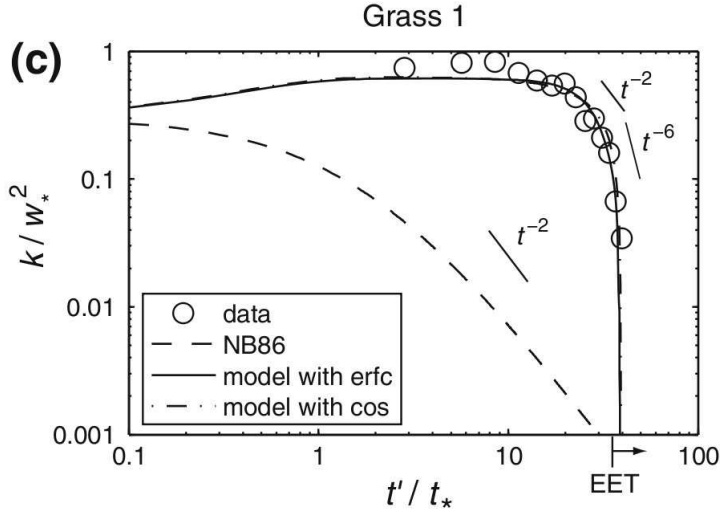


Figura 8.1: Decay of TKE from LITFASS experiment (see Nadeau et al., 2011, Fig. 7).

using for h a fixed (in time) estimate of CBL depth. A is an empirical constant, suggested to be 1 in their Eq. 9. With a prescribed evolution of the surface heat flux, Eq. 8.5 may be integrated. A qualitative result obtained with a smooth modulation of the surface heat flux is reported in Fig. 8.1

8.3 Qualche risultato

Dai dati delle LES (Sorbjan, 1997) risulta un andamento parzialmente diverso da entrambe le semplici formulazioni: Fig. 8.2 e Fig. 8.3. Il tempo scala del decadimento e' L/W_* se L e' una misura dell'altezza del CBL. Apparentemente l'energia cinetica e' costante per $tW_*/L \simeq 1$: per tempi maggiori il decadimento e' diverso a seconda delle componenti della velocita', dell'ordine di t^{-2} per la varianza della componente verticale e di t^{-1} per quelle orizzontali. Inoltre la LES mostra un trasferimento spettrale di energia verso le scale piu' grandi con il tempo: la dissipazione agisce selettivamente sulle scale piu' piccole: vedi Fig. 8.4 e Fig. 8.5. Il modello spettrale di Goulart et al. (2003) mantiene sostanzialmente costante il valore di kz per il quale la funzione $kE(k)$ ha un massimo, ovvero la scala dei vortici energetici non cambia.

Dai dati dell'eclissi (Fig. 8.6), il decadimento dell'energia cinetica turbolenta sembra proporzionale a $(tW_*/h)^{-2}$, e si verifica per $(tW_*/h) > 1$. (nota: W_* e' il valore determinato dalle condizioni convettive subito antecedenti l'inizio dell'eclissi).

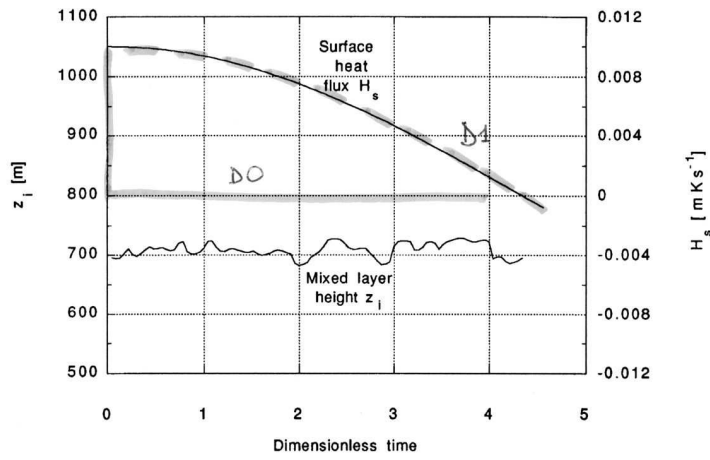


Figura 8.2: LES dello strato residuale: forzante (il caso D0 corrisponde ad una brusca interruzione del flusso di calore al suolo, a $t = 0$; il caso D1 corrisponde ad un decadimento progressivo del flusso di calore al suolo) e altezza risultante (Sorbjan, 1997).

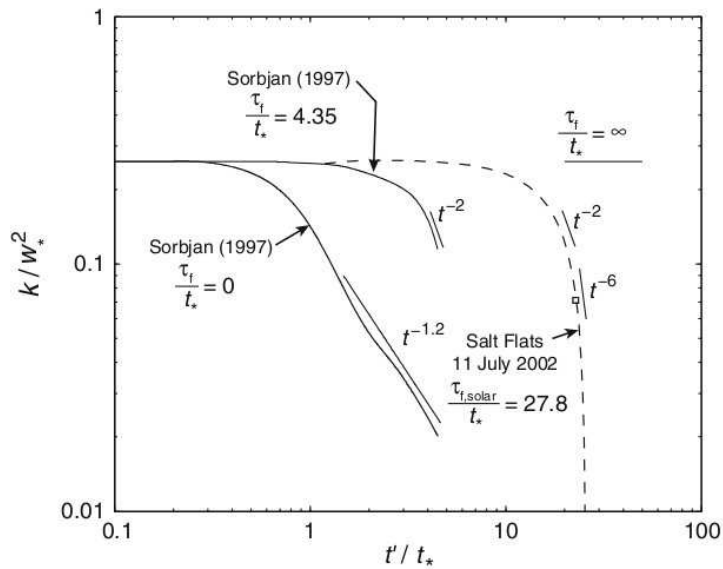


Figura 8.3: Decadimento dell'energia cinetica turbolenta (normalizzata al valore iniziale) nello strato residuale in funzione del tempo (normalizzato sulla scala del tempo convettivo $t_* = h/W_*$) per i casi D0 e D1 (Sorbjan, 1997) and from Nadeau et al. (2011) model.

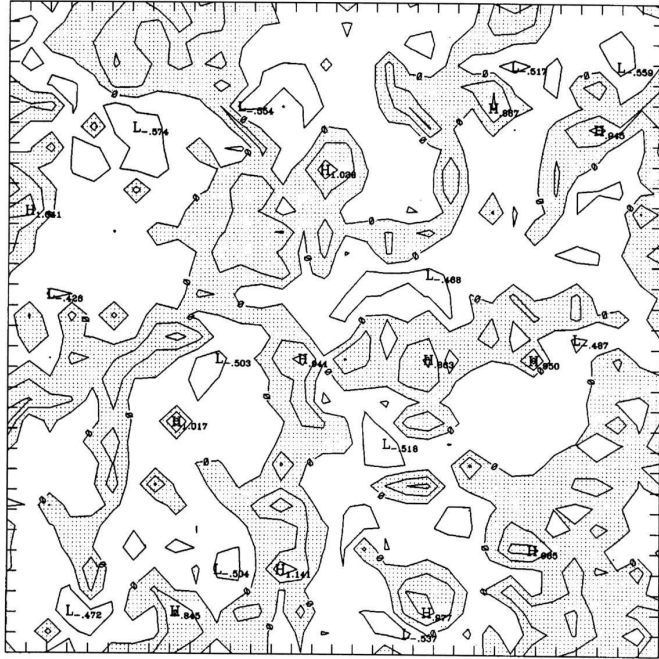


Figura 8.4: Sezione orizzontale del campo di velocita' verticale (da Sorbjan, 1997) alla quota $0.3h$ all'istante iniziale.

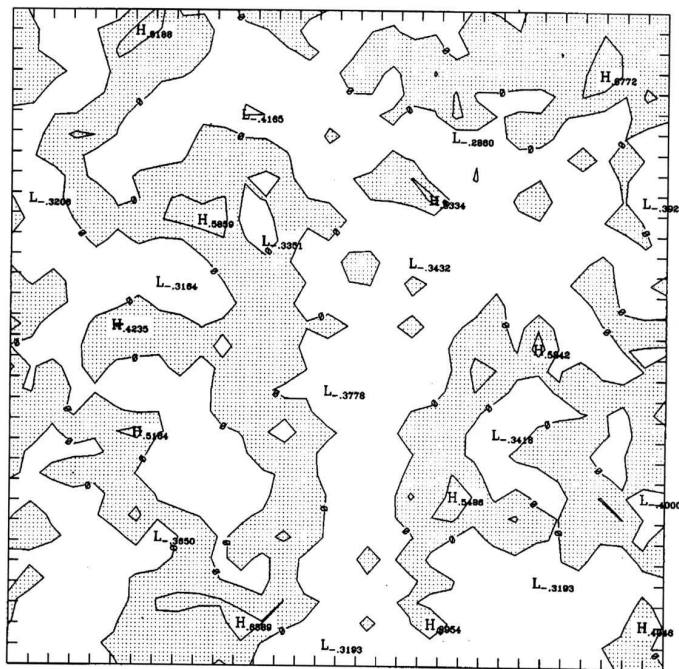


Figura 8.5: Come in Fig. 8.4 all'istante $4.5t_*$. Le linee di livello corrispondono agli stessi valori della figura precedente. Si osserva un appiattimento del campo (scomparsa dei gradienti piu' forti) al trascorrere del tempo.

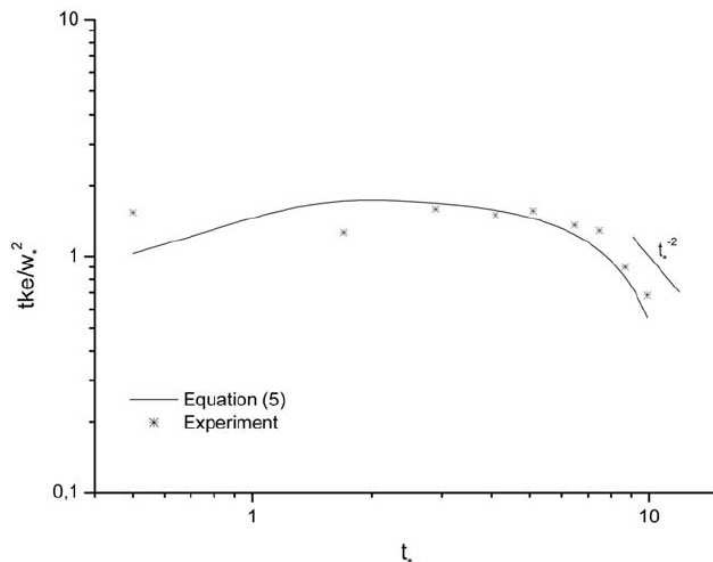


Figura 8.6: Decadimento dell'energia cinetica nel surface layer durante un'eclissi di sole, da Anfossi et al. (2004).

Capitolo 9

Lo strato limite stabile (SBL)

9.1 Osservazioni introduttive

Lo strato limite diventa stabilmente stratificato quando il flusso termico relativo alla superficie è negativo, cioè la superficie è più fredda dell'aria. Ciò avviene spesso di notte sulla terra, nel caso di cielo limpido. Al di sopra di tale zona, lo strato restante contiene quella parte di atmosfera che durante il giorno era la parte superiore dello strato mescolato.

La traccia di misure sodar mette in evidenza la variabilità in verticale delle strutture riflettenti, estese nel tempo: Fig. 9.1. Alcuni profili sono riportati nelle Fig. 9.2, 9.3, 9.4 e 9.5 (da Cuxart et al., 2000). La struttura termica dello strato limite stabile impedisce alla turbolenza prodotta al livello del suolo di interessare gli strati superiori: il trasporto verticale di momento risulta essere limitato.

Per contro si possono osservare onde interne. L'effetto delle onde è spesso evidente negli spettri. La frequenza massima delle onde è N , che in condizioni caratteristiche dello strato limite è dell'ordine di $10^{-2}s^{-1}$. La scala della turbolenza nello strato limite essendo κz , si ha che a $z = 100m$ con un vento di $10m/s$ la frequenza dei vortici contenenti energia in condizioni neutrale è dell'ordine di $10^{-1}s^{-1}$. Il contributo delle onde all'energia cinetica totale quindi può risultare distinto dal contributo dell'intervallo inerziale.

Per ragioni dimensionali, se una parte dello spettro è influenzata prevalentemente dalle onde di gravità (cioè $E(k) = f(N, k)$), dovrà avere una pendenza pari a k^{-3} : infatti $[E(k)] = L^3T^{-2}$, $[N] = T^{-1}$, $[k] = L^{-1}$ da cui $E(k) \sim N^2k^{-3}$, ovvero, applicando la trasformazione di turbolenza congelata, $E(\omega) \sim \omega^{-3}$.

Le onde si manifestano maggiormente allontanandosi dal suolo, in particolare per quanto riguarda la componente verticale della velocità.

Spettri misurati a diverse quote, e per le tre componenti della velocità, sono mostrati in Fig. 9.6. È bene osservare che solo gli spettri misurati alle quote più basse si riferiscono allo strato stabile vero e proprio.

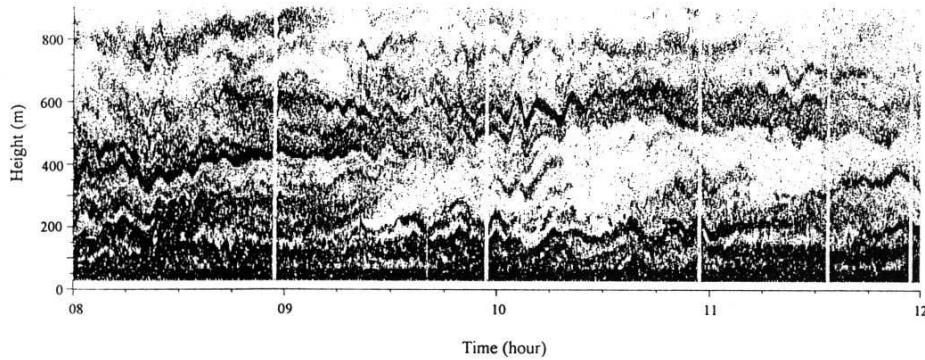


Figura 9.1: Fac-simile dell'eco SODAR per uno strato limite stabile: il suolo raffredda l'aria sovrastante (Argentini et al., 1996). (Le zone scure indicano intensita' di risposta elevata.) Appaiono strutture oscillanti (nel tempo), ed elevati gradienti in verticale.

Dati relativi al profilo di velocita' media in condizioni stabili sono riportati in Fig. 9.7: la forma lineare per Φ_m appare verificata fino a valori $z/L_{MO} \simeq 1$.

9.1.1 An extension: remarks from Zilitinkevich and Esau (2007)

- the stable boundary layer may be quite shallow (see also new data, for instance SABLES (Cuxart et al., 2000) and CASES99 (Poulos et al., 2002));
- the stable boundary layer height is a function of surface fluxes, the Brunt-Vaisala frequency N (i.e., a measure of the stability aloft), the Coriolis parameter (which affects the almost neutral boundary layer height) according to Zilitinkevich and Esau (2007); it is affected by the turbulence production due to shear aloft, as in presence of low level jets (Banta et al., 2006);

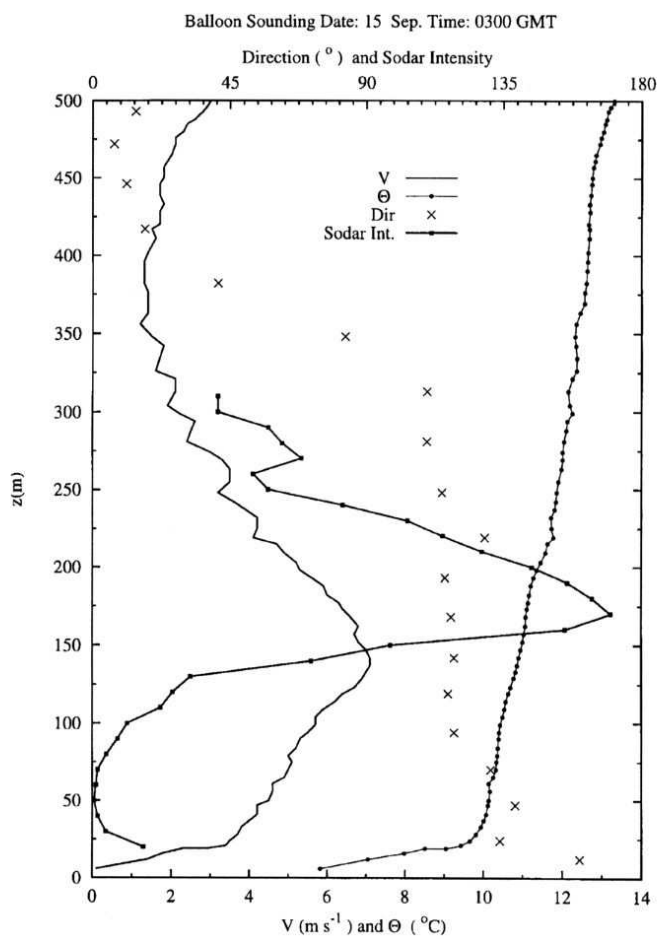


Figura 9.2: Profilo verticale di velocità V e direzione Dir del vento, e di temperatura potenziale Θ in funzione della quota sul suolo (da Cuxart et al., 2000, 15 sett. 1998; 0300GMT).

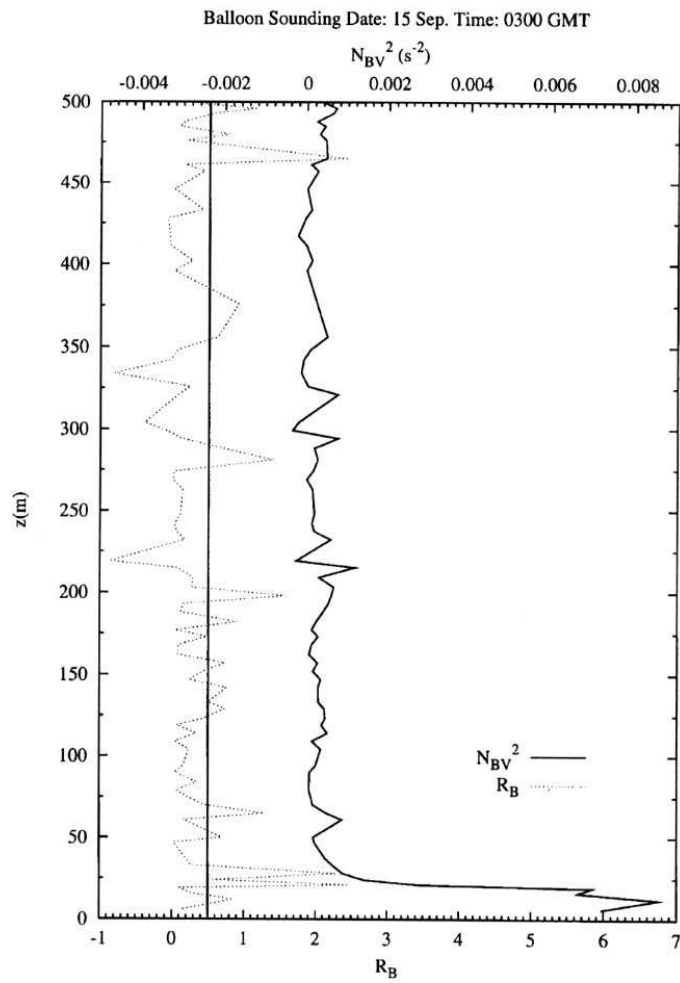


Figura 9.3: Profilo verticale di numero di Richardson (di bulk, stimato dai dati dei profili e non dai flussi turbolenti) e di frequenza di Brunt-Vaisala in funzione della quota sul suolo (da Cuxart et al., 2000, 15 sett. 1998; 0300GMT).

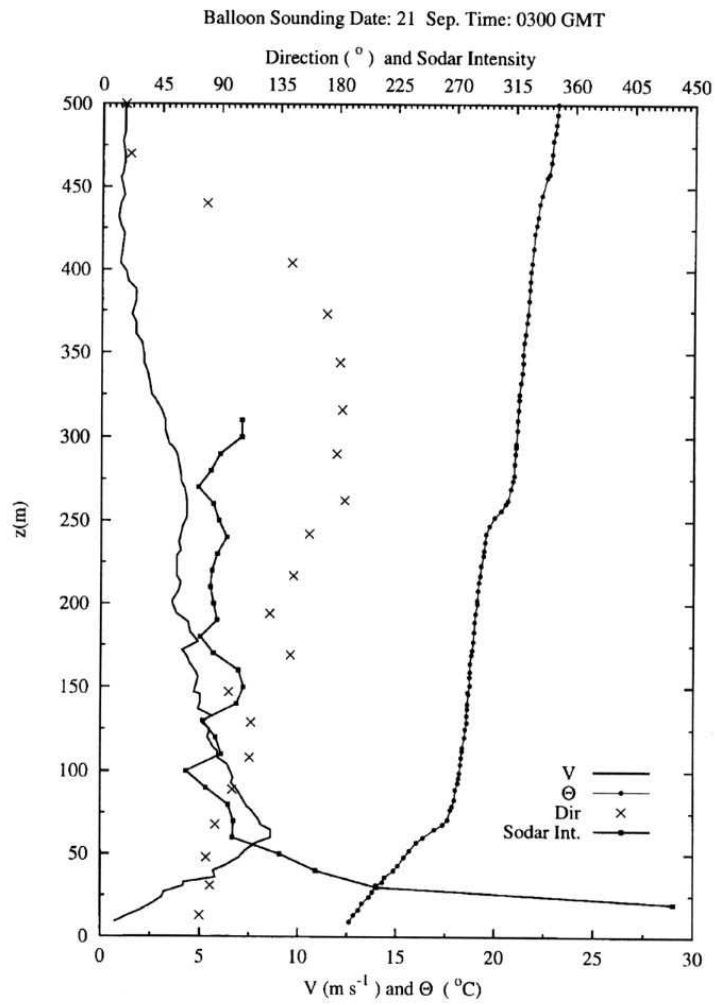


Figura 9.4: Profilo verticale di velocità V e direzione Dir del vento, e di temperatura potenziale Θ in funzione della quota sul suolo (da Cuxart et al., 2000, 21 sett. 1998; 0300GMT).

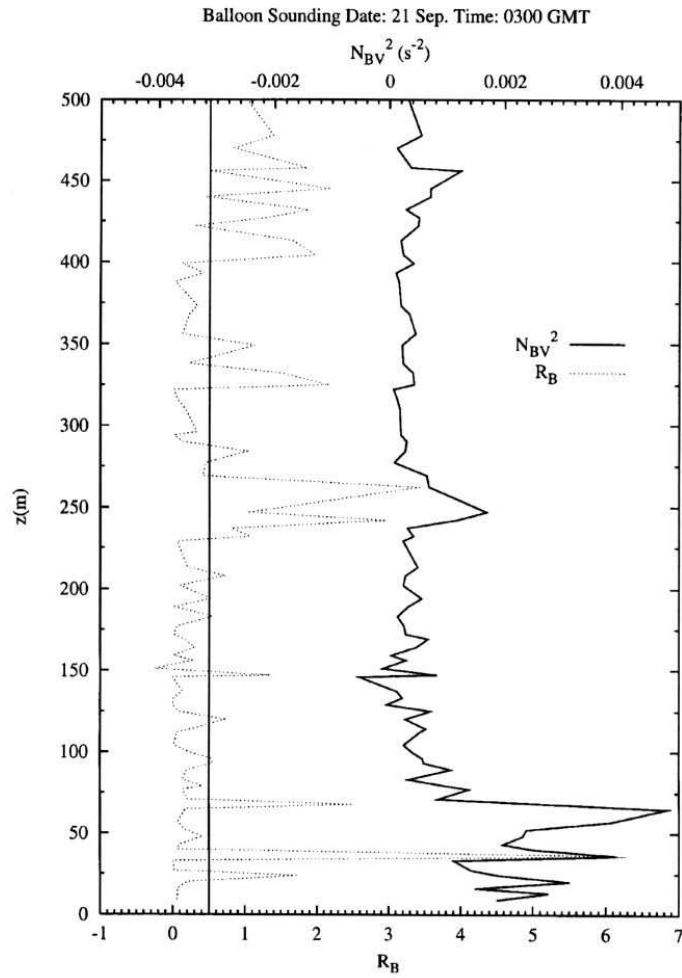


Figura 9.5: Profilo verticale di numero di Richardson di bulk, stimato dai dati dei profili, e di frequenza di Brunt-Vaisala in funzione della quota sul suolo (da Cuxart et al., 2000, 21 sett. 1998; 0300GMT).

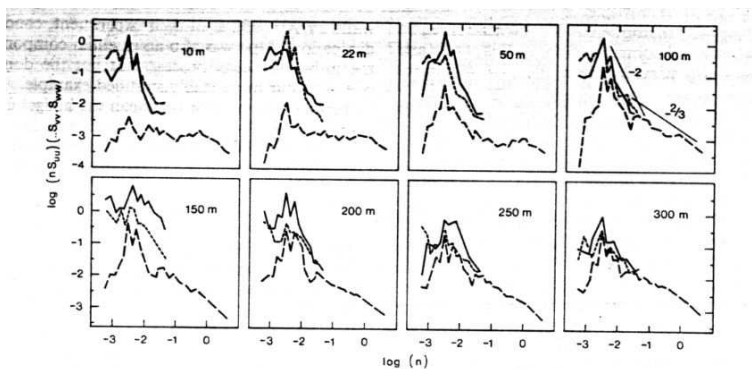


Figura 9.6: Spettri ωE_i delle tre componenti della velocità a diverse altezze (torre BAO) in funzione della frequenza ω (in Hz), da Finnigan et al. (1984).

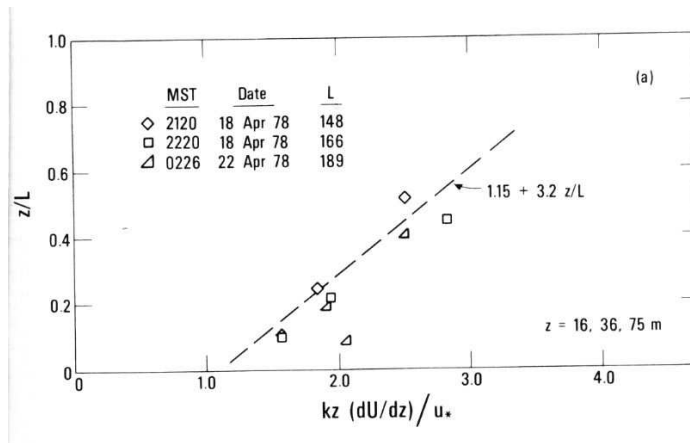


Figura 9.7: Profilo nondimensionale del vento, da dati BAO, da Hunt et al. (1985).

- local values instead of global values for the scales have to be considered (the z -less parameterisation: Wyngaard and Coté (1972), Nieuwstadt (1984)).

Neutral and stable boundary layers are classified as:

- TN truly neutral: $\overline{w'\vartheta'}|_0 = 0$, $N = 0$
- CN conventionally neutral: $\overline{w'\vartheta'}|_0 = 0$, $N > 0$
- NS nocturnal stable: $\overline{w'\vartheta'}|_0 < 0$, $N = 0$
- LS long-lived stable: $\overline{w'\vartheta'}|_0 < 0$, $N > 0$

(see Zilitinkevich et al., 2007).

Vertical profiles of mean wind and temperature, after Poulos et al. (2002), showing the time evolution of the stable boundary layer: see Fig. 9.8.

Downward vertical heat flux near the surface is expected to increase with stratification in weakly stable conditions up to a level such that vertical transport is inhibited: thus we expect to have typically the maximum values of heat flux for some intermediate value of z/L_{MO} . Beyond, the heat flux diminishes, turbulence becomes intermittent: very stable conditions occur. See Fig. 9.9 for a scheme of the regimes.

For instance, the two regimes (weak and very stable) affect the SBL vertical profiles of mean velocity and temperature: see Figs. 9.10, 9.11, 9.12. The transition occurs at $z/L_{MO} \sim 1$.

According to many authors, the experimental evidence shows that the gradient Richardson number is not limited in conditions of strong stability (whereas the flux Richardson number must be limited).

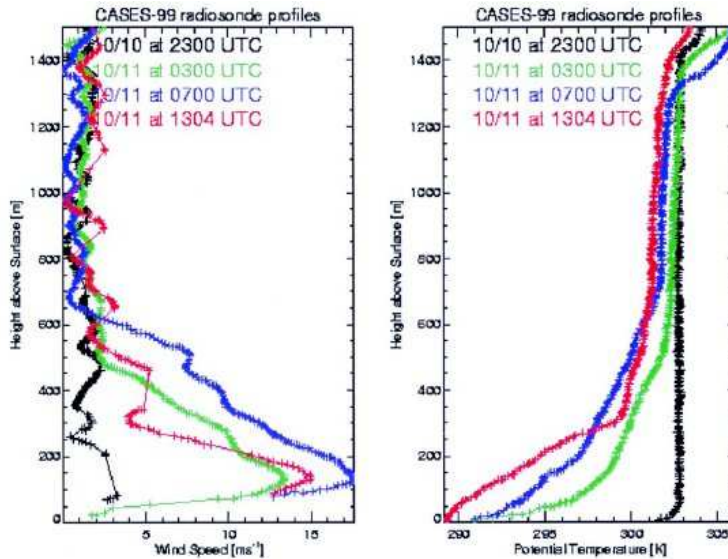


Figure 9.8: Vertical profiles of mean wind and temperature, after Poulos et al. (2002). Note that midnight local corresponds to 0700 UTC.

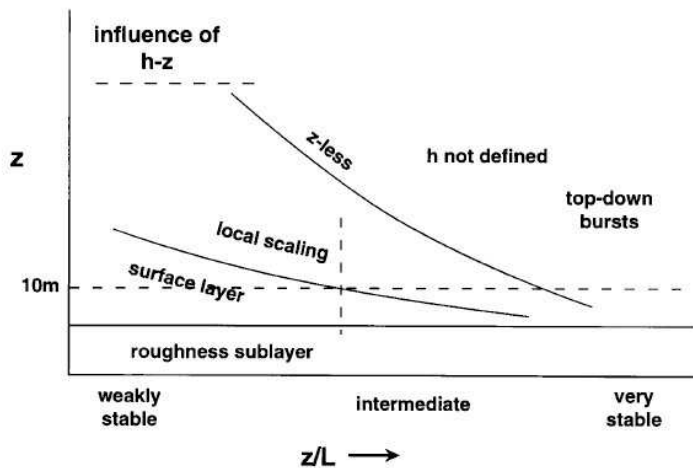


Figure 9.9: From Mahrt (1999): idealized stable boundary-layer flow regimes as function of height and stability. At intermediate z/L_{MO} values the maximum downward heat flux is expected to occur.

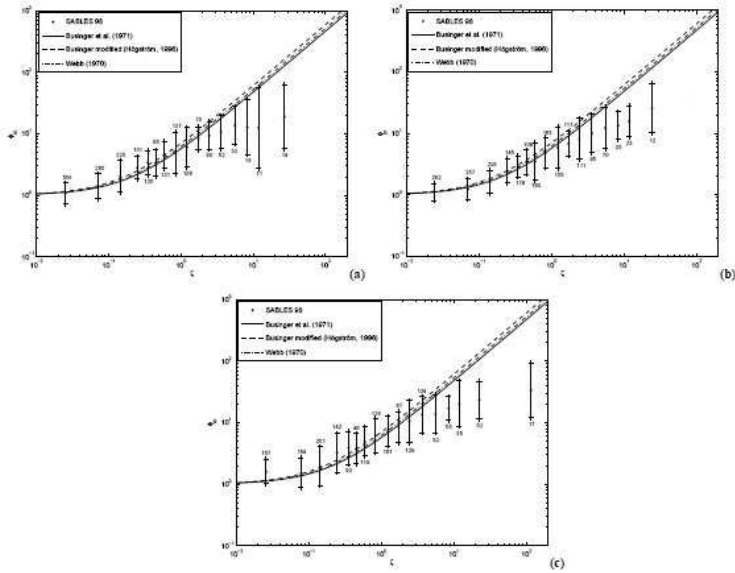


Figura 9.10: From Yague et al. (2006): Φ_m vs. ζ from the field experiment SABLES98: $a z = 5.8m$, $b z = 13.5m$, $c z = 32m$.

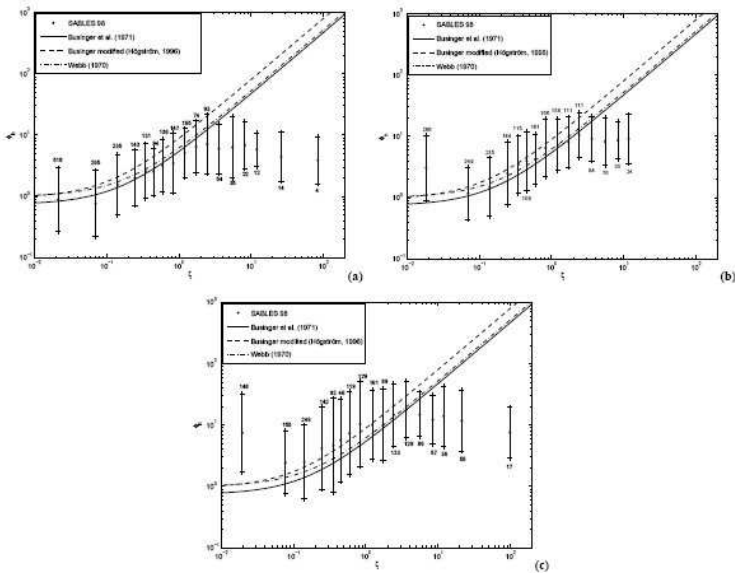


Figura 9.11: As in Fig. 9.10, but for Φ_h .

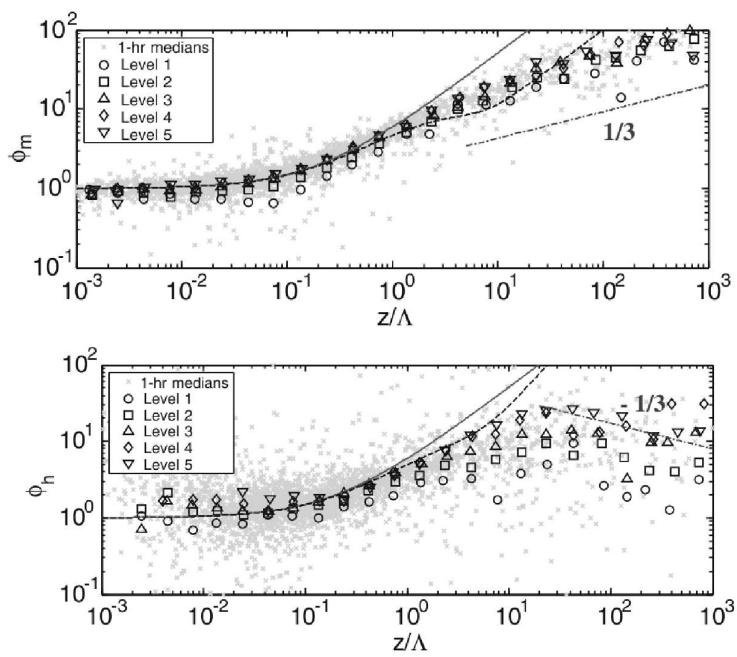


Figure 9.12: Nondimensional vertical gradient of mean wind and temperature as function of the local stability parameter, from Grachev et al. (2005), fig. 14b and fig. 15b.

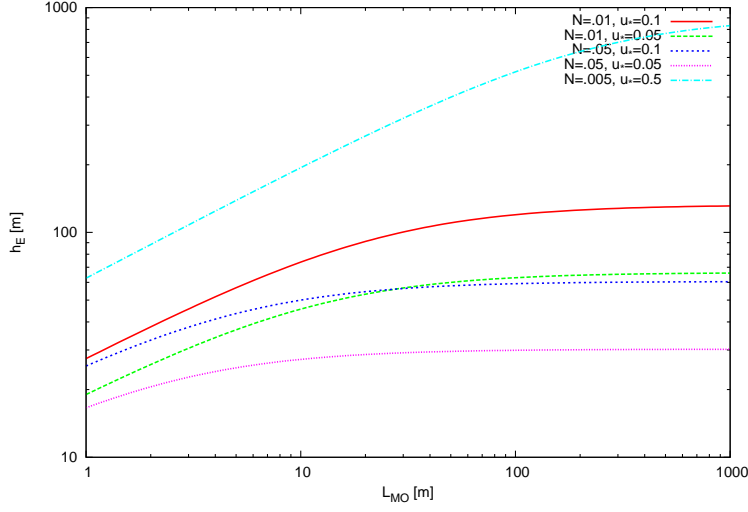


Figure 9.13: h_E as function of L_{MO} . Three different Brunt-Vaisala frequencies are used: $N = 0.005, 0.01, 0.05 \text{ s}^{-1}$ and three friction velocity values: $u_* = 0.05, 0.1, 0.5 \text{ m s}^{-1}$.

9.1.2 Neutral and stable b. l. height

Based on theoretical considerations and LES data, Zilitinkevich and Esau (2007) suggested a formula for the equilibrium height h_E of the neutral and stable boundary layer:

$$h_E^{-2} = \frac{f^2}{C_R^2 u_*^2} + \frac{N|f|}{C_{CN}^2 u_*^2} - \frac{|f|(g/\vartheta_{00})\overline{w'\vartheta'}}{C_{NS}^2 u_*^4} \quad (9.1)$$

where

$$C_R = 0.6, C_{CN} = 1.36, C_{NS} = 0.51 \quad (9.2)$$

This is an interpolation formula among the TN b.l.height, the CN b.l. height and the NS b.l. height. A different value $C_{NS} = 1.18$ is suitable to get agreement with a previous formula (Zilitinkevich and Baklanov, 2002, Eq. 13). Note that the last term may be rewritten as function of L_{MO} :

$$-\frac{|f|(g/\vartheta_{00})\overline{w'\vartheta'}}{C_{NS}^2 u_*^4} = \frac{|f|}{\kappa C_{NS}^2 L_{MO} u_*} \quad (9.3)$$

The same authors proposed also a relaxation equation to model the adjustment in time of the b.l. height to its equilibrium value given by Eq. 9.1. In absence of subsidence and of horizontal gradients it reads:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{C_t u_*}{h_E} (h - h_E), C_t \simeq 1 \quad (9.4)$$

The relaxation time of the boundary layer is $T = h_E / (C_t u_*)$. The solution is:

$$h(t) = [h(0) - h_E] \exp\left(-\frac{t}{T}\right) + h_E \quad (9.5)$$

The agreement with field data is questionable (also because of the difficulty of a definition for the height).

9.1.3 An example of time evolution

Misure piu' recenti di turbolenza (p.es. Poulos et al., 2002; Cuxart et al., 2000) mettono in evidenza due aspetti: lo strato limite stabile e' spesso non stazionario, e puo' presentare valori di R_b grandi (di ordine 1) a cui corrispondono flussi al suolo trascurabili. Talvolta SBL e' caratterizzato da una struttura "top-down" con produzione di energia cinetica turbolenta lontano dal suolo (Banta et al., 2006).

Un caso di studio: notte 13-14 settembre 1999 (Yagüe, comunicazione personale). Si osserva la transizione da condizioni moderatamente stabili (fino a $t = 14.9$) a condizioni piu' stabili, con il numero di Richardson che passa da valori $R_b \sim 0.2$ a valori compresi tra 0.5 ed 1 (Fig. 9.14), mentre i flussi di quantita' di moto e di calore vanno progressivamente a zero, Fig. 9.15. L'andamento dei flussi con la quota e' decrescente (in valore assoluto) durante la fase iniziale, e diventa approssimativamente uniforme in seguito: Fig. 9.16, mentre i profili di velocita' e di temperatura media (Fig. 9.17) non mostrano caratteristiche marcatamente diverse (in realta' il gradiente verticale di temperatura e' piu' grande vicino al suolo durante la fase piu' stabile).

Quindi, mentre lo strato limite moderatamente stabile rientra in uno schema interpretativo per cui si puo' definire una altezza legata al fatto che i flussi turbolenti vanno a zero, quando la stabilita' e' molto grande i flussi (molto piccoli in valore assoluto) sono approssimativamente costanti con la quota. In questo caso si perde la possibilita' di utilizzarli come parametri di scala, e quindi anche di utilizzarli per le stime della stabilita' (lunghezza di Obukhov) e della altezza.

9.2 La teoria della similitudine locale

Alcune considerazioni fatte nel caso quasi neutrale possono essere estrapolate al valore critico del numero di Richardson: poniamo cioe' $\mathcal{R}_f = \mathcal{R}_{fc}$. Si osserva che il numero di Richardson e' una misura di carattere locale, mentre

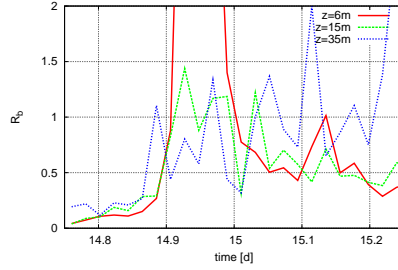


Figura 9.14: Numero di Richardson di bulk in funzione del tempo. In ascissa il giorno, essendo 1 il primo settembre 1999. La linea rossa si riferisce ad uno strato centrato attorno a 5.8 m, la verde a 13.5 m, la blu a 32 m.

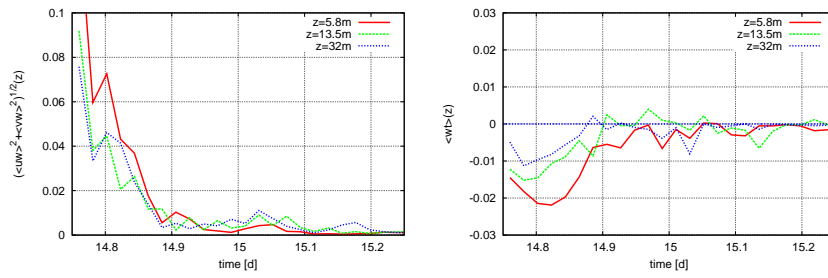


Figura 9.15: Flusso di quantita' di moto (a sinistra) e flusso di calore (a destra), per lo stesso periodo di tempo. Colori come per la Fig. 9.14.

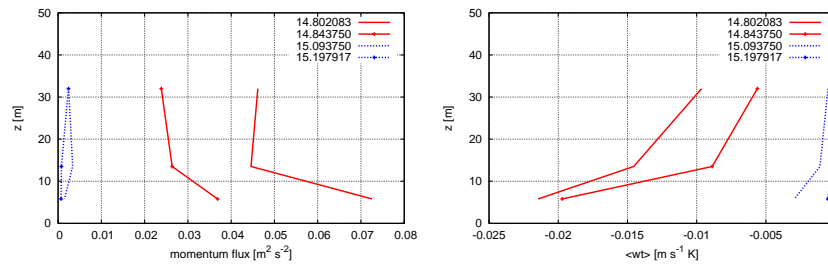


Figura 9.16: Andamento dei flussi di quantita' di moto (a sinistra) e di calore (a destra) con la quota (in ordinate). Le curve rosse si riferiscono a due intervalli di tempo di mezz'ora durante la prima parte della notte (moderatamente stabile), le blu alla seconda parte (molto stabile).

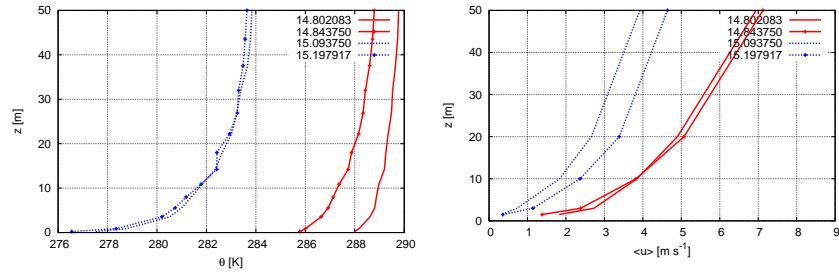


Figura 9.17: Andamento della temperatura media (a sinistra) e della velocità media (a destra) con la quota. I colori come nella Fig. 9.16.

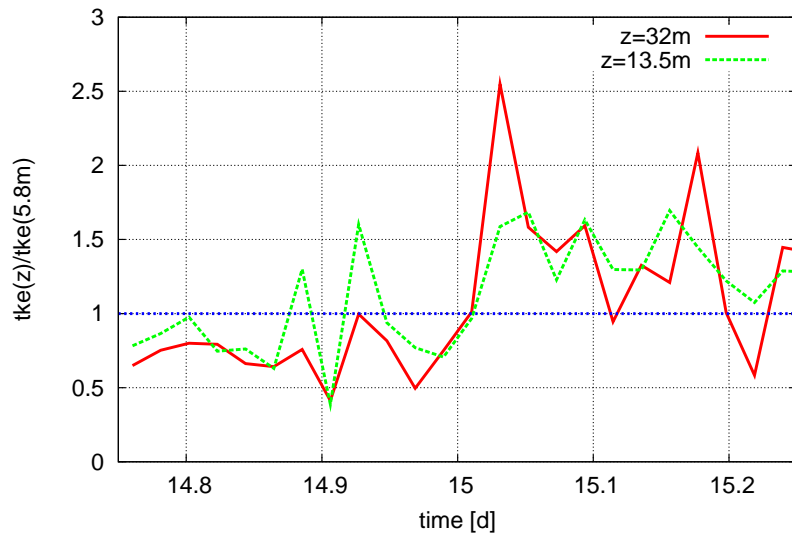


Figura 9.18: Ratio $TKE(z)/TKE(5.8m)$

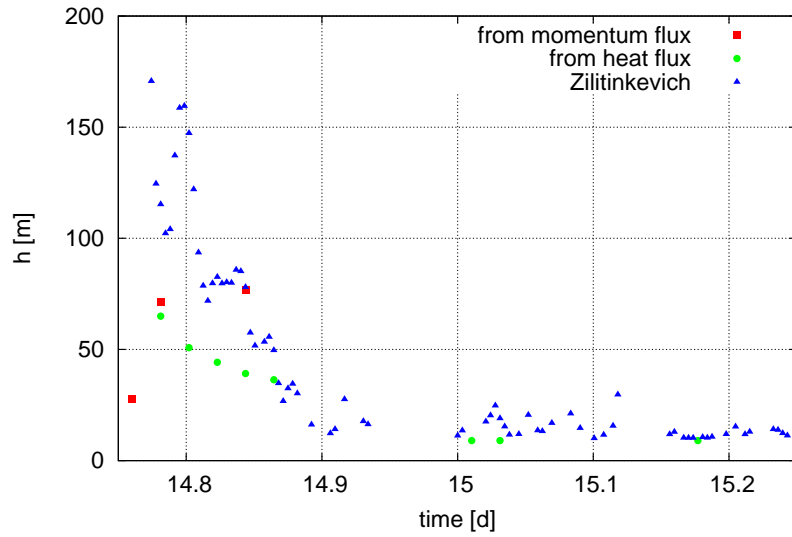


Figura 9.19: SBL height estimated from Zilitinkevich formula and from profiles of momentum flux and heat flux

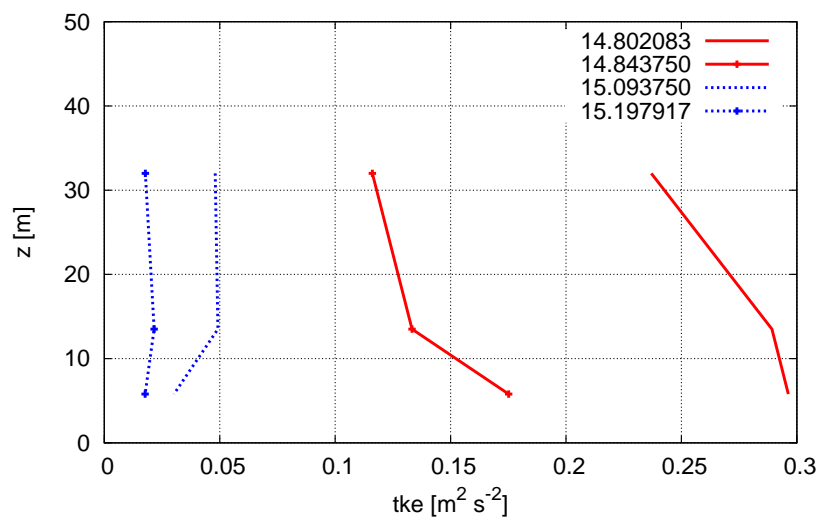


Figura 9.20: $TKE(z)$

la lunghezza di Monin-Obukhov e' una scala globale (basata su misure al suolo). Tuttavia nell'ipotesi che la stabilita' sia tale da rendere costante \mathcal{R}_f (ed uguale al valore critico) si puo' indagare sulla relazione formale tra le due quantita'.

Definita la quota nondimensionale $\zeta = z/L_{MO}$ e ricordando la forma del profilo della velocita' media $d\bar{u}/dz = u_*/\kappa z \Phi_m(\zeta)$, si ottiene:

$$\mathcal{R}_f = -\frac{g}{\vartheta_{00}} \frac{\overline{w'\vartheta'}}{u_*^2 d\bar{u}/dz} = \frac{\zeta}{\Phi_m(\zeta)} \quad (9.6)$$

Questa relazione fornisce l'espressione per il gradiente nondimensionale del vento in condizioni asintotiche di grande stabilita': $\Phi_m = \mathcal{R}_{fc}^{-1}\zeta$ da cui si ottiene la espressione cosiddetta 'z-less' (in quanto non contiene esplicitamente la quota) per il gradiente verticale del vento:

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{\kappa L_{MO} \mathcal{R}_{fc}} \quad (9.7)$$

Il profilo del vento e' dunque lineare in z . In condizioni di grande stabilita' la parte logaritmica dello strato limite tende ad essere confinata in uno strato sottile presso il suolo; il profilo lineare somiglia, qualitativamente, al profilo di velocita' in un flusso laminare dominato dalla viscosita'. Coerentemente, la relazione flusso-gradiente suggerisce per la viscosita' turbolenta della quantita' di moto un valore costante:

$$K_m \equiv \frac{-\overline{w'w'}}{d\bar{u}/dz} = u_* \kappa L_{MO} \mathcal{R}_{fc} \quad (9.8)$$

9.2.1 Nieuwstadt (1984) model

Nieuwstadt (1984) (see also Nieuwstadt, 1985) theory (revised for instance by Derbyshire, 1990) is based on the assumption of Richardson number constant with heigh, and suggests that turbulence is characerised by local scales (independent on z)

The conservation equation 3.60 for the mean temperature in conditions of horizontal homogeneity reads:

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w'\vartheta'}}{\partial z} \quad (9.9)$$

and the equation for the horizontal mean momentum 3.57 read:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = \varepsilon_{ij3} f(\bar{u}_j - u_{gj}) - \frac{\partial \overline{u'_i w'}}{\partial z}, \quad i=1,2 \quad (9.10)$$

where u_{gj} are the two components of the geostrophic wind, taken steady and constant with heighth. The we assume that the vertical gradients of mean velocity and temperature are steady: thus $\partial^2 \bar{\vartheta} / \partial z \partial t = 0$, for instance.

Writing $V = \bar{u} + i\bar{v}$ e $X = -\overline{u'w'} - \overline{v'w'}$ and deriving the previous equations with respect to the height we get:

$$\frac{d^2 \overline{w'\vartheta'}}{dz^2} = 0 \quad (9.11)$$

$$-if \frac{dV}{dz} + \frac{d^2 X}{dz^2} = 0 \quad (9.12)$$

These equations can be made nondimensional by defining $x = X/u_*^2$, $y = \overline{w'\vartheta'}/\overline{w'\vartheta'}|_0$, $s_V = L_{MO}/u_* dV/dz$, $s_\vartheta = -L_{MO}/\vartheta_* d\bar{\vartheta}/dz$, where $u_*^2 = |X(z=0)|$. Moreover, $\xi = z/h$. Remember that $\vartheta_* < 0$.

Eq. 9.11 becomes

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} = 0 \quad (9.13)$$

and Eq. 9.12

$$-i \frac{fh^2}{u_* L_{MO}} s_V + \frac{d^2 x}{d\xi^2} = 0 \quad (9.14)$$

The last equations suggests that the unique parameter characterising the solution is

$$\gamma_c^2 = fh^2/u_* L_{MO} \quad (9.15)$$

but the equations are still unclosed.

From the definitions the following expressions for \mathcal{R}_f and \mathcal{R}_i can be obtained:

$$\mathcal{R}_f \equiv \frac{g/\vartheta_{00} \overline{w'\vartheta'}}{u'w' d\bar{u}/dz + \overline{v'w'} d\bar{v}/dz} = -\frac{g/\vartheta_{00} \overline{w'\vartheta'}}{\Re[X^* dV/dz]} = \frac{1}{\kappa} \frac{y}{\Re[x^* s_V]} \quad (9.16)$$

(X^* is the complex conjugate of X),

$$\mathcal{R}_i \equiv \frac{g/\vartheta_{00} d\bar{\vartheta}/dz}{(d\bar{u}/dz)^2 + (d\bar{v}/dz)^2} = \frac{g/\vartheta_{00} d\bar{\vartheta}/dz}{|dV/dz|^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{s_\vartheta}{|s_V|^2} \quad (9.17)$$

The closure of the model arises from the assumption that \mathcal{R}_f and \mathcal{R}_i are constant and equal to their critical values, \mathcal{R}_{fc} and \mathcal{R}_{ic} .

The boundary conditions for Eqs. 9.13 and 9.14 are:

$$y = 1, |x| = 1 \text{ for } \xi = 0 \quad (9.18)$$

$$y = 0, |x| = 0 \text{ for } \xi = 1 \quad (9.19)$$

$$V = 0 \text{ for } \xi = 0 \quad (9.20)$$

$$V = V_g \text{ for } \xi = 1 \quad (9.21)$$

Eq. 9.13, remembering the b.c. above, has the linear solution:

$$y = (1 - \xi) \quad (9.22)$$

or

$$\overline{\vartheta'w'} = \overline{\vartheta'w'}|_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (9.23)$$

The kinematic heat flux is reported in Fig. 9.27, where $\overline{w'\vartheta'}|_0 = \vartheta_* u_*$.

Eq. 9.16 is rewritten using Eq. 9.22:

$$\Re[x^* s_V] = \frac{1 - \xi}{\kappa \mathcal{R}_{fc}} \quad (9.24)$$

or

$$x^* s_V = \frac{1 - \xi}{\kappa \mathcal{R}_{fc}}, \quad \Im[x^* s_V] = 0 \quad (9.25)$$

By multiplying Eq. 9.14 by x^* and substituting with Eq. 9.25 we get:

$$x^* \frac{d^2 x}{d\xi^2} - i \frac{\gamma_c^2}{\kappa \mathcal{R}_{fc}} (1 - \xi) = 0 \quad (9.26)$$

We are looking for a solution written as $x = (1 - \xi)^{(a+ib)}$. By substituting in Eq. 9.26 we get:

$$(a + ib)(a - 1 + ib)(1 - \xi)^{2a-2} - i \frac{\gamma_c^2}{\kappa \mathcal{R}_{fc}} (1 - \xi) = 0 \quad (9.27)$$

In order to verify the identity, the exponents of $(1 - \xi)$ must be equal: $2a - 2 = 1$, and thus $a = 3/2$. Using this value for a , and putting equal the real and imaginary parts of the multiplicative coefficients it results:

$$\frac{3}{4} - b^2 = 0, \quad 2b = \frac{\gamma_c^2}{\kappa \mathcal{R}_{fc}} \quad (9.28)$$

Thus, from the first relationship, $b = \sqrt{3}/2$, and using this value in the second relationship:

$$\frac{\gamma_c^2}{\kappa \mathcal{R}_{fc}} = \sqrt{3} \quad (9.29)$$

This equation allows to write the height h in terms of the other model parameters: from Eq.9.15 we get

$$h = \gamma_c \left(\frac{u_* L_{MO}}{f} \right)^{1/2} \quad (9.30)$$

being $\gamma_c = (\sqrt{3} \kappa \mathcal{R}_{fc})^{1/2} \approx 0.4$. Of course this relation fails at low latitudes. (Remember the expression Eq. 5.11 for the neutral case.)

Solution of Eq. 9.26 turns out to be:

$$\begin{aligned}
x &= (1 - \xi)^{(3+i\sqrt{3})/2} \equiv \\
&\equiv (1 - \xi)^{3/2} \exp\left(i\frac{\sqrt{3}}{2} \log(1 - \xi)\right) \equiv \\
&\equiv (1 - \xi)^{3/2} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log(1 - \xi)\right) + i \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log(1 - \xi)\right) \right]
\end{aligned} \tag{9.31}$$

The modulus of the momentum flux, from Eq. 9.31, see Fig. 9.23, results:

$$\frac{|X|}{u_*^2} = \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{3/2} \tag{9.32}$$

Using Eq.9.31 into Eq. 9.25 we get the expression for the vertical gradient of the mean velocity:

$$s_V = \frac{1}{\kappa \mathcal{R}_{fc}} (1 - \xi)^{(-1+i\sqrt{3})/2} \tag{9.33}$$

It can be verified that the solution for x and s_V satisfies the condition $\Im[x^* s_V] = 0$.

Substituting the result 9.33 obtained for s_V into Eq. 9.17 the expression for the vertical gradient of the mean temperature can be obtained:

$$s_\vartheta = \frac{\mathcal{R}_{ic}}{\kappa \mathcal{R}_{fc}^2} (1 - \xi)^{-1} \tag{9.34}$$

The vertical profile of mean wind is obtained by integrating Eq. 9.33. Remembering Eq. 9.20 we get:

$$V(z) = \frac{u_*}{L_{MO} \kappa \mathcal{R}_{fc}} \int_0^z \left(1 - \frac{z'}{h}\right)^{(-1+i\sqrt{3})/2} dz' \tag{9.35}$$

and putting $y = 1 - z'/h$ we get

$$\begin{aligned}
V(z) &= -\frac{u_* h}{L_{MO} \kappa \mathcal{R}_{fc}} \int_1^{1-z/h} y^{(-1+i\sqrt{3})/2} dy = \\
&= \frac{u_* h}{L_{MO} \kappa \mathcal{R}_{fc}} \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \left[1 - (1 - z/h)^{(1+i\sqrt{3})/2} \right]
\end{aligned} \tag{9.36}$$

According to the condition 9.21: $V(h) = V_g$ an expression for V_g can be obtained as function of the model parameters:

$$V_g = \frac{u_* h}{L_{MO} \kappa \mathcal{R}_{fc}} \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{u_* h}{L_{MO} \kappa \mathcal{R}_{fc}} e^{-\frac{i\pi}{3}} \tag{9.37}$$

The modulus of the geostrophic wind results

$$|V_g| = \frac{u_* h}{L_{MO} \kappa \mathcal{R}_{fc}} \tag{9.38}$$

and its components are

$$u_g = |V_g| \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right), \quad v_g = |V_g| \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad (9.39)$$

Note that Eq. 9.38 together with Eq. 9.30 shows that in the frame of this model the geostrophic wind, the boundary layer height and the friction velocity are strictly related, as functions of stability and Coriolis parameter: Eq. 9.38 may be rewritten as

$$|V_g| = \left(\frac{\sqrt{3}}{\kappa \mathcal{R}_{fc}}\right) \frac{u_*^{3/2}}{L_{MO}^{1/2} f^{1/2}} \quad (9.40)$$

In other words, if for instance the geostrophic wind and the momentum flux at the surface are specified, all the remaining quantities are defined.

For the vertical profile of mean velocity an Ekman-like spiral is obtained: given $V_g = u_g + iv_g$ it results

$$\frac{V_g - V}{|V_g|} = e^{-\frac{i\pi}{3}} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})} \quad (9.41)$$

or

$$\frac{u_g - u}{|V_g|} = \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{1/2} \cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \ln\left(1 - \frac{z}{h}\right) - \frac{\pi}{3}\right] \quad (9.42)$$

$$\frac{v_g - v}{|V_g|} = \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{1/2} \sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \ln\left(1 - \frac{z}{h}\right) - \frac{\pi}{3}\right] \quad (9.43)$$

Sometimes it is useful the modulus of the mean wind $|V(z)| \equiv \sqrt{V^*(z)V(z)}$:

$$|V(z)| = |V_g| \left[2 - \frac{z}{h} - 2\left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln\left(1 - \frac{z}{h}\right)\right)\right]^{1/2} \quad (9.44)$$

For $z/h \ll 1$ the expansion of Eq. 9.36 gives

$$V(z) \equiv u(z) + iv(z) = \frac{u_* z}{L_{MO} \kappa \mathcal{R}_{fc}} \quad (9.45)$$

and thus the v component results zero, whereas the u component presents a linear profile in agreement with the similarity theory in the asymptotic case $z/L_{MO} \gg 1$.

Note that Eq. 9.36 gives a supergeostrophic velocity at heights of the order of $0.9h$ (a manifestation of 'low-level jet') and that the geostrophic velocity is the correct scale for the wind in SBL (excluding obviously the surface layer $z/L_{MO} \ll 1$).

Moreover, Derbyshire (1990) noted that the wind modulus at the SBL top, Eq. 9.38, is equal to the extrapolation to $z = h$ for the near-ground linear profile, Eq. 9.45.

The vertical profile of mean temperature is obtained by integrating Eq. 9.34.

$$\bar{\vartheta}(z) = \bar{\vartheta}(0) - \frac{\vartheta_*}{L_{MO}} \frac{\mathcal{R}_{ic}}{\kappa \mathcal{R}_{fc}^2} \int_0^z \left(1 - \frac{z'}{h}\right)^{-1} dz' \quad (9.46)$$

from which

$$\bar{\vartheta}(z) = \bar{\vartheta}(0) - \frac{\vartheta_* h}{L_{MO}} \frac{\mathcal{R}_{ic}}{\kappa \mathcal{R}_{fc}^2} \int_0^\xi (1 - \xi')^{-1} d\xi' \quad (9.47)$$

and finally

$$\bar{\vartheta}(z) = \bar{\vartheta}(0) + \frac{\vartheta_* h}{L_{MO}} \frac{\mathcal{R}_{ic}}{\kappa \mathcal{R}_{fc}^2} \ln \left(1 - \frac{z}{h}\right), \quad z < h \quad (9.48)$$

For $z/h \ll 1$ the series expansion of Eq. 9.48 ($\ln(1 - x) \sim -x$) gives

$$\bar{\vartheta}(z) = \bar{\vartheta}(0) - \frac{\vartheta_* \mathcal{R}_{ic} z}{\kappa \mathcal{R}_{fc}^2 L_{MO}} \quad (9.49)$$

The eddy diffusion coefficients consistent with this model are obtained using the flux-gradient relationship. As far momentum is concerned:

$$-X = -K_m \frac{dV}{dz} \quad (9.50)$$

and using Eqs. 9.31 and 9.33 we get

$$K_m = u_* \kappa L_{MO} \mathcal{R}_{fc} (1 - \xi)^2 \quad (9.51)$$

Similarly, as far temperature is concerned:

$$y u_* \vartheta_* = -K_h \frac{d\bar{\vartheta}}{dz} = K_h s_\vartheta \frac{\vartheta_*}{L_{MO}} \quad (9.52)$$

from which, using Eqs. 9.23 and 9.34 we get

$$K_h = u_* \kappa L_{MO} \frac{\mathcal{R}_{fc}^2}{\mathcal{R}_{ic}} (1 - \xi)^2 \quad (9.53)$$

The turbulent Prandtl number turns out to be constant: $\mathcal{P}_r = \mathcal{R}_{ic}/\mathcal{R}_{fc}$. The solution is presented in Fig. 9.21.

Measurements presented by Nieuwstadt (1985) broadly confirm these results, at least in the upper half of the SBL, where $\mathcal{R}_f \approx 0.2$: see Fig. 9.22. In the surface layer the Richardson number tends to zero as the height diminishes, because the scale length is proportional to the height (as for neutral or weak stratification, Eqs. 6.21 and 6.52). Nieuwstadt results are valid for $z \gg L_{MO}$.

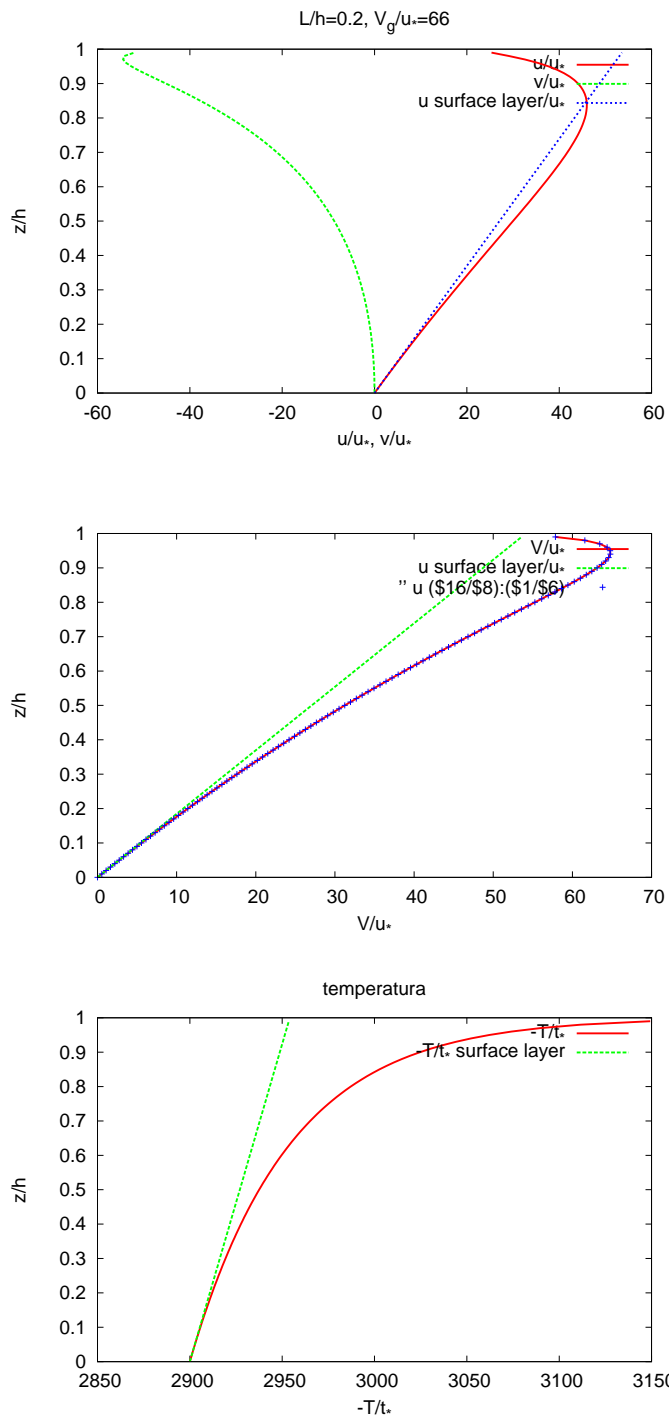


Figura 9.21: Vertical profile of the components of the mean velocity (top); modulus of the velocity (centre) and potential temperature profile (bottom). The height is normalized with h . The surface layer functions are also reported.

Dimensional arguments suggest that:

$$\overline{u_i'^2} \propto \overline{-u'w'} \quad (9.54)$$

$$\overline{\vartheta'^2} \propto -\frac{\overline{w'\vartheta'}}{\overline{-u'w'}^{1/2}} \quad (9.55)$$

so that it results:

$$\frac{\overline{u_i'^2}}{u_*'^2} = C_i^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{3/2} \quad i = 1, 2, 3 \quad (9.56)$$

where coefficients C_i must be equal to the variance normalised over the squared friction velocity in the surface layer. The empirical values suggested by Nieuwstadt (1985) are:

$$C_1 = 2.04, C_2 = 1.7, C_3 = 1.4 \quad (9.57)$$

The resulting profiles are compared with data in Figs. 9.24, 9.25 and 9.26. For the temperature variance we get:

$$\frac{\overline{\vartheta'^2}}{\vartheta_*'^2} = C_\vartheta^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{1/2} \quad C_\vartheta = 3.2 \quad (9.58)$$

that approximately agrees with the observations only in the upper half of SBL (see Fig. 9.28).

9.3 The nondimensional profiles for mean velocity and temperature

9.3.1 Nondimensional gradient of mean velocity

In stable cases ($\zeta > 0$):

$$\Phi_m = 1 + \alpha_{m3}\zeta \quad (9.59)$$

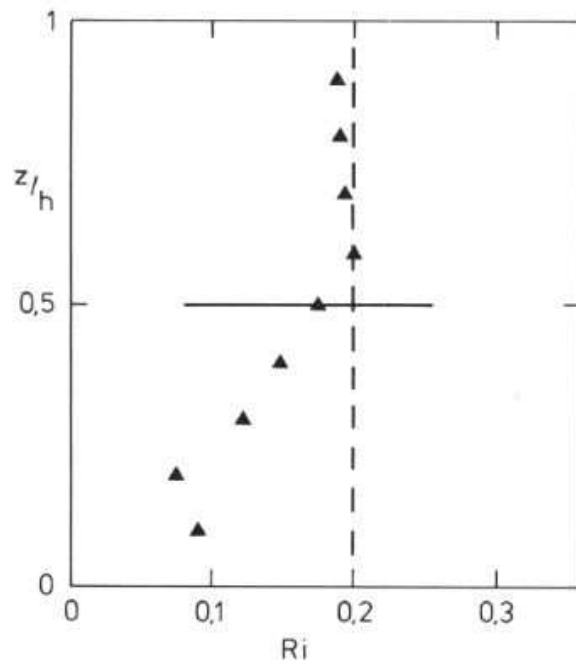


Figura 9.22: Richardson number as function of height. The error bar is reported. From Nieuwstadt (1985).

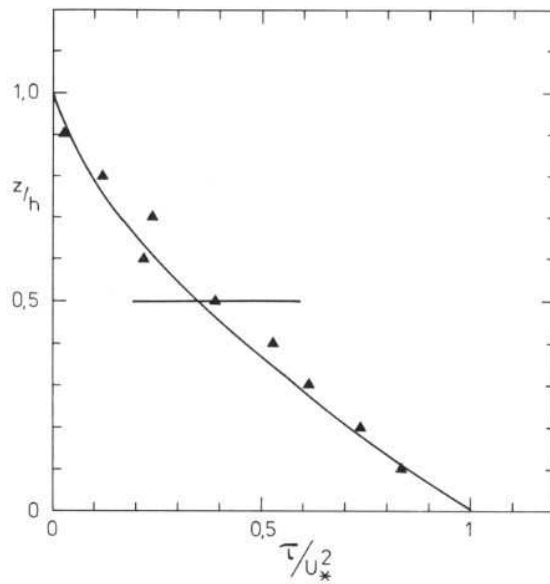


Figura 9.23: As in Fig. 9.22 for the momentum flux. Qui $\tau = [(-\overline{u'w'})^2 + (-\overline{v'w'})^2]^{1/2}$.

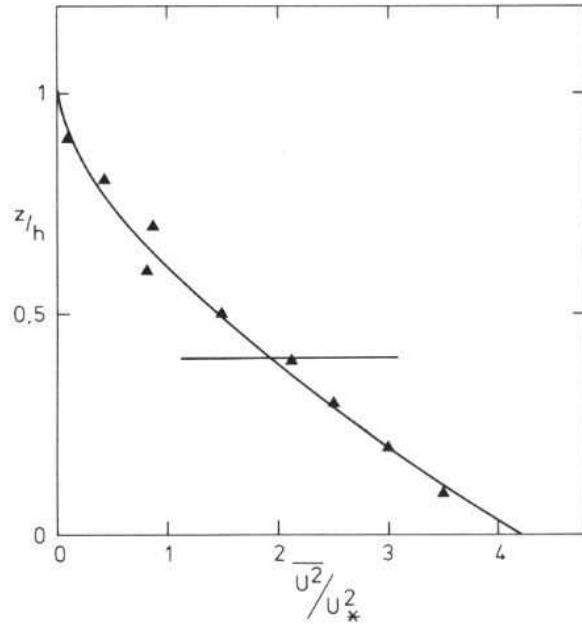


Figura 9.24: As in Fig. 9.22, for the variance of the u' component of the wind vector.

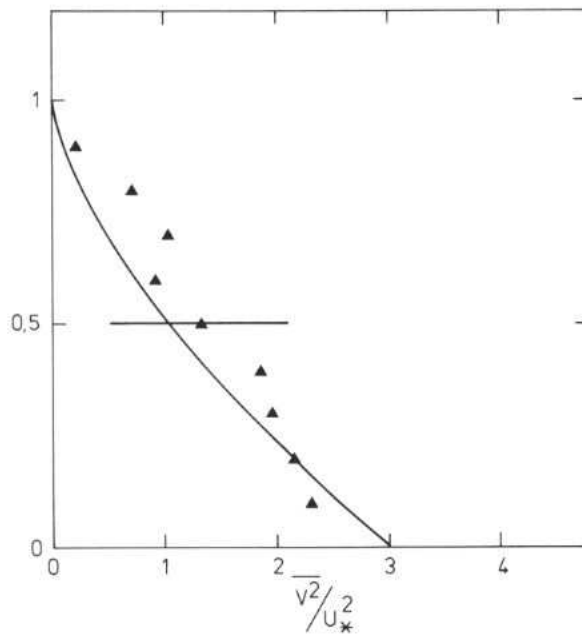


Figura 9.25: As in Fig. 9.22, for the variance of v' .

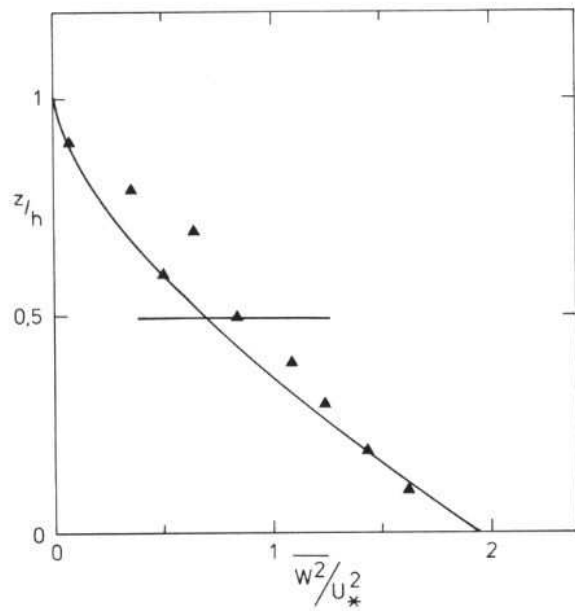


Figura 9.26: As in Fig. 9.22, for the variance of w' .

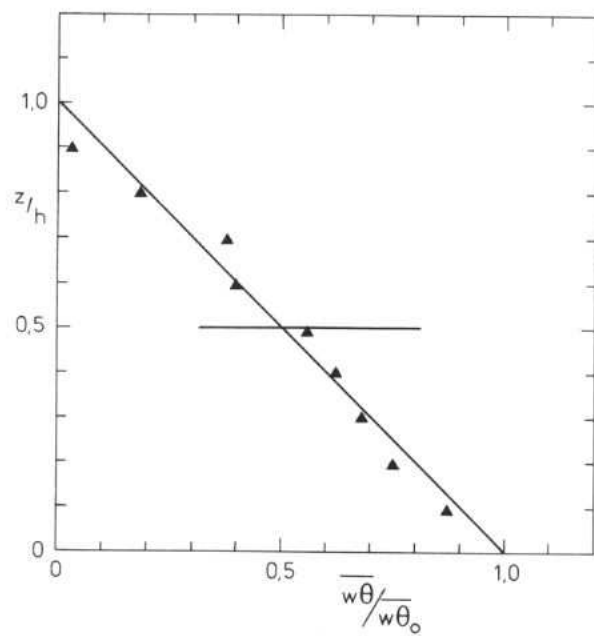


Figura 9.27: As in Fig. 9.22, for the vertical heat flux $\overline{w'\theta'}$.

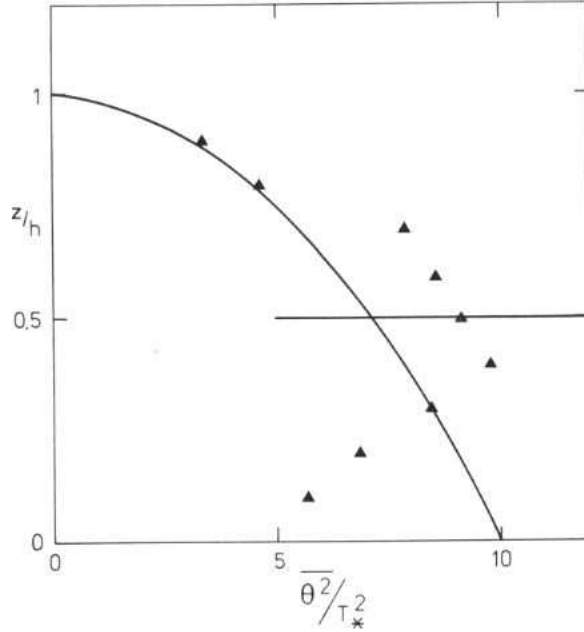


Figura 9.28: As in Fig. 9.22, for the variance of temperature $\overline{\theta'^2}$.

where $\alpha_{m3} = 6$ according to Högström (1996) who reevaluated Wyngaard and Coté (1971). A value $\alpha_{m3} = 5.3$ was proposed by Frenzen and Vogel (2001).

From the Ψ_m function by Beljaars and Holtslag (1991) (here Eq. ??), the following Φ_m results:

$$\Phi_m(\zeta) = 1 + a\zeta + b\zeta(1 + c - d\zeta)\exp(-d\zeta), \quad \zeta > 0 \quad (9.60)$$

with $a = 0.7$, $b = 2/3$ (see also Luhar et al., 2009), $c = 5$, $d = 0.35$

According to Kondo et al. (1978), Cheng and Brutsaert (2005), Yague et al. (2006), in very stable conditions the velocity profile becomes almost independent on ζ . Cheng and Brutsaert (2005) suggest:

$$\Phi_m = 1 + a \frac{\zeta + \zeta^b(1 + \zeta^b)^{((1-b)/b)}}{\zeta + (1 + \zeta^b)^{(1/b)}} \quad (9.61)$$

with $a = 6.1$, $b = 2.5$. The asymptotic limit is $\Phi_m(\zeta \gg 1) \simeq 1 + a$.

Grachev et al. (2007) suggests a u_* -less parameterisation $\Phi_m \propto \zeta^{1/3}$ (from $d\overline{u_1}/dx_3 = u_*/(\kappa x_3)\Phi_m(\zeta) \propto u_*^0$, keeping $\overline{v'u'_3}$ fixed). Fitting by eye Fig. 2 from Yague et al. (2006) (see Fig. 9.10) a consistent power law dependence on stability can be found for $\zeta > 1$:

$$\Phi_m = (1 + \alpha_{m3})\zeta^{1/3} \quad \text{for } \zeta > 1 \quad (9.62)$$

The discussed nondimensional velocity gradients are reported in Fig. 9.29.

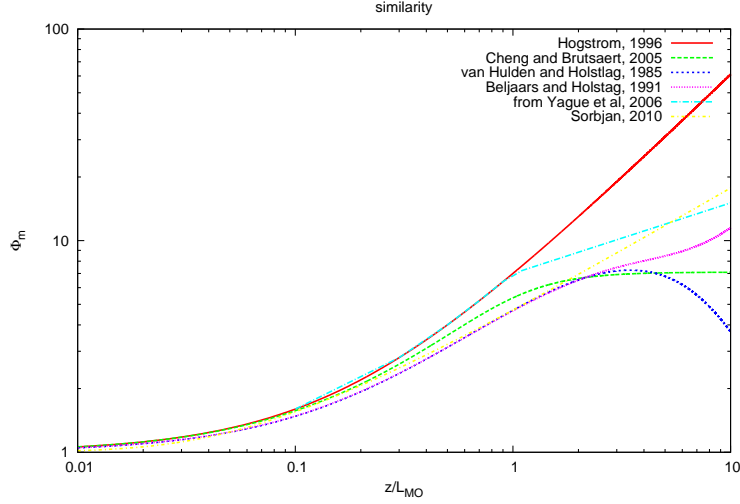


Figura 9.29: Φ_m as function of ζ from different authors .

9.3.2 Nondimensional gradient of mean temperature

In stable cases, according to Högström (1996):

$$\Phi_h = \alpha_{h0} + \alpha_{h2}\zeta \quad (9.63)$$

where $\alpha_{h2} = 8$.

From the Ψ_h function by Beljaars and Holtslag (1991) (here Eq. ??), the corresponding Φ_h can be derived:

$$\Phi_h(\zeta) = 1 + a\zeta \left(1 + \frac{2}{3}a\zeta\right)^{1/2} + b\zeta(1 + c - d\zeta)\exp(-d\zeta) \quad (9.64)$$

with the same values of the coefficients given for Eq. 9.60.

According to Kondo et al. (1978), Cheng and Brutsaert (2005), Yague et al. (2006), in very stable conditions the temperature profile becomes almost independent on ζ . Cheng and Brutsaert (2005) suggest:

$$\Phi_h = 1 + c \frac{\zeta + \zeta^d(1 + \zeta^d)^{((1-d)/d)}}{\zeta + (1 + \zeta^d)^{(1/d)}} \quad (9.65)$$

with $c = 5.3, d = 1.1$. The asymptotic limit is $\Phi_h(\zeta \gg 1) \simeq 1 + c$.

From Yague et al. (2006) (see Fig. 9.11) for $z/L > 1$ it results:

$$\Phi_h = \alpha_{h0} + \alpha_{h2} \text{ for } \zeta > 1 \quad (9.66)$$

Grachev et al. (2007) discuss the consistency with the u_* -less parameterisation, that suggests $\Phi_h \propto \zeta^{-1/3}$: see for comparison Yague et al. (2006, Figs.

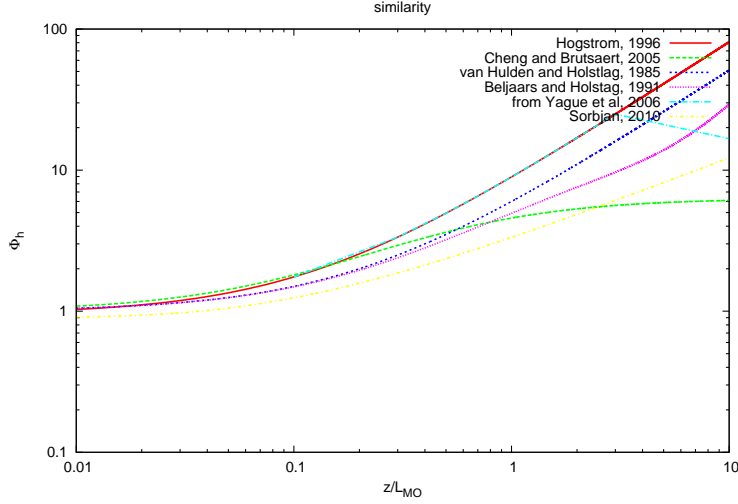


Figura 9.30: Φ_h as function of ζ from different authors .

7 and 8). Fitting by eye Figs. 7 or 8 from Yague et al. (2006) for $\zeta > \zeta_h$, $\zeta_h = 3$, it results:

$$\Phi_h = (\alpha_{h0} + \alpha_{h2}\zeta_h) \left(\frac{\zeta}{\zeta_h} \right)^{-1/3} \quad \text{for } \zeta > \zeta_h \quad (9.67)$$

Grachev et al. (2007) discuss the consistency with the u_* -less parameterisation, that suggests $\Phi_h \propto \zeta^{-1/3}$: see for comparison Yague et al. (2006, Figs. 7 and 8), in this text Fig. 9.11. A qualitative parameterisation is:

$$\Phi_h = (\alpha_{h0} + \alpha_{h2}) (\zeta/\zeta_h)^{-1/3}, \quad \zeta_h = 3 \quad \text{for } \zeta > 3 \quad (9.68)$$

The discussed nondimensional temperature gradients are reported in Fig. 9.30.

9.4 Second order velocity moments

In the surface layer the z -less parameterization (Wyngaard and Coté, 1972; Nieuwstadt, 1985) is a paradigm.

Recent experimental studies raise some doubts about the effective applicability of this concept to velocity variances (Pahlow et al., 2001): a departure from the z -less paradigm occurs for very stable conditions.

Power laws with free exponent are often used, such as:

$$\Phi_i^{(2)} = a_i + b_i \zeta^{c_i} \quad (9.69)$$

According to the u_* -less hypothesis, a power law dependence $\Phi_i^{(2)} \propto \zeta^{2/3}$ is expected. It may be observed that for large stability Kaimal and Finnigan (1994b) suggest a dependency from ζ^2 , De Franceschi utilises fitting functions growing as $\zeta^{2/3}$, Sorbjan (2010) suggests $\zeta^{2/5}$.

A plot of $\Phi_3^{(2)}$ is reported in Fig. 9.4.

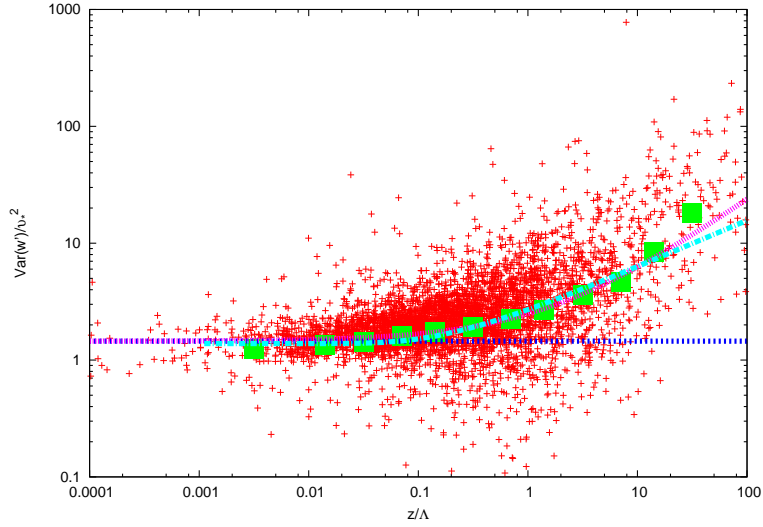


Figure 9.31: Variance of the vertical velocity normalised over the local friction velocity as function of z/Λ for the Antartica data set (red +). The modal values for the different bins are indicated by the big green squares. The z -less parameterisation is represented by the blue line, the u_* -less parameterisation by the pink line, the Sorbjan and Grachev (2010) parameterisation by the cyan line.

9.5 Second order temperature moments

It may be observed that Kaimal and Finnigan (1994b) and Ramana et al. (2004) suggest a decrease as ζ^{-2} for large ζ . Most of the recent experimental studies, for example Liu et al. (1998) and Andreas et al. (1998), are however consistent with this paradigm; Pahlow et al. (2001) propose a relationship constant at large z/L , but they recognize the need to fit the data with ζ^{-2} for small ζ , consistently with Eq. 7.36. Divergence at small ζ is observed also by Dias et al. (1995). On the other hand, the u_* -less hypothesis for temperature variance suggests $\Phi_{\vartheta}^{(2)} \propto \zeta^{-2/3}$.

A parameterisation is thus:

$$\Phi_{\vartheta} = c_t + a_t \left(\frac{z}{\Lambda}\right)^{-2}, \quad \frac{z}{\Lambda} < 1 \quad (9.70)$$

$$\Phi_{\vartheta} = \frac{d_t}{1 + b_t \left(\frac{z}{\Lambda}\right)^{2/3}}, \quad \frac{z}{\Lambda} > 1 \quad (9.71)$$

Numerical values are $a_t = 2.5 \cdot 10^{-5}$, (already estimated by Tampieri and Maurizi (2008) and consistent with Pahlow et al. (2001)) $c_t = 7.8$ (estimated for $.02 < z/\Lambda < 1$), $d_t = 17.38$ and $b_t = 1.23$ (estimated for $5 < z/\Lambda < 100$)

The temperature variance normalised with ϑ_*^2 is shown in Fig. 9.5.

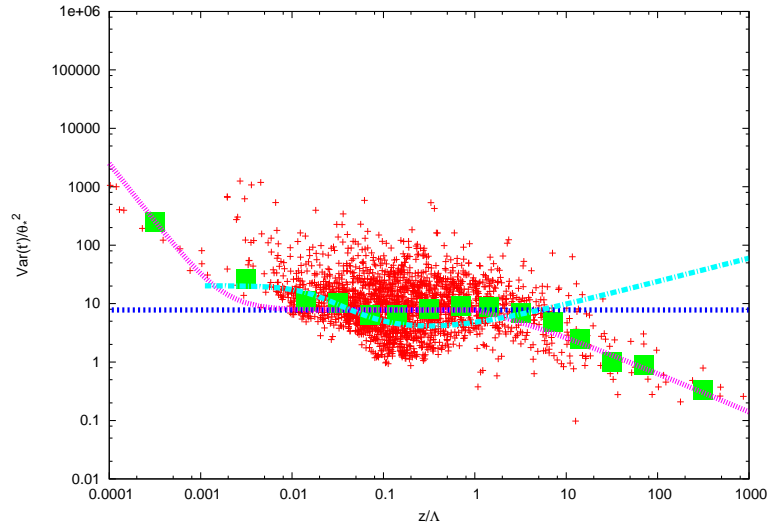


Figura 9.32: As in Fig. 9.4 for the temperature fluctuations normalised over the local temperature scale.

9.6 Dissipation rate

Wyngaard and Coté (1971):

$$\Phi_\varepsilon = \left(1 + 2.5\zeta^{3/5}\right)^{3/2} \quad (9.72)$$

Frenzen and Vogel (2001) propongono

$$\Phi_\varepsilon = [0.85 + 0.6\zeta](\Phi_m - \zeta) \quad (9.73)$$

dove la funzione Φ_m e' data dalla Eq. 9.59 con $\alpha_{m3} = 5.3$.